10.1 Nemlineáris rendszerek stabilitása. Lyapunov stabilitás

Nemlineáris dinamikus rendszerek esetén a lineáris rendszerekre kidolgozott stabilitásvizsgálati módszerek nem alkalmazhatóak. Nemlineáris esetben nem beszélhetünk pólusokról (a rendszernek nem definiált az állapotmátrixa), a klasszikus frekvenciatartománybeli vizsgálati módszerek (Bode, Nyquist) is érvényüket vesztik. Ezért ezen rendszerek stabilitását új megközelítésben kell tárgyaljuk. A legelterjedtebb a Lyapunov módszer, amely a rendszerhez rendelt energiafüggvény változásából von le következtetéseket a rendszer stabilitásáról. Belátható, hogy ha a rendszer energiája időben csökken és nullához konvergál, akkor a rendszer állapotai ugyancsak nulla vagy konstans értékekhez kell, hogy konvergáljanak. Ennek az elvnek a matematikai megfogalmazása a Lyapunov stabilitási kritérium.
A Lyapunov módszer közkedveltsége annak is köszönhető, hogy stabilitásvizsgálat mellett alkalmazható stabilitást biztosító irányítások tervezésére is.
Legyen a vizsgált nemlineáris dinamikus rendszer:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t) \tag{10.3}$$

Először vezessük be az egyensúlyi állapot fogalmát. $\underline{x}^*$ *a rendszer egyensúlyi állapota*, ha a t^* pillanatban a rendszer állapota $\underline{x}^*$, akkor bármely $t>t^*$ pillanatban az állapot $\underline{x}^*$ marad. Mivel egyensúlyban az állapotok nem változnak, ezért $\dot{\underline{x}}^* = f(\underline{x}^*, t) = \underline{0}$. Ezt a feltételt használhatjuk a rendszer egyensúlyi állapotainak feltérképezésére.

10.1 Példa: Határozzuk meg az alábbi nemlineáris rendszer (Duffing oszcillátor) egyensúlyi állapotait:

$$\ddot{x} = -x^3 - \alpha x \tag{10.4}$$

Az $\dot{\underline{x}}^* = f(\underline{x}^*, t) = \underline{0}$ feltételből következik, hogy:

$$x^{*3} + \alpha x^* = 0 \tag{10.5}$$

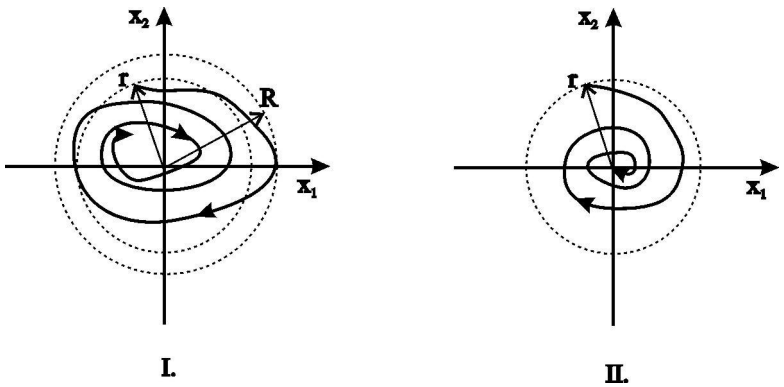
Látszik, hogy a rendszernek három egyensúlyi állapota van:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = \sqrt{\alpha},\ x_3^* = -\sqrt{\alpha} \tag{10.6}$$

A nemlineáris rendszerek esetén az egyensúlyi pontok stabilitását vizsgáljuk. Feltételezzük, hogy a rendszer állapotterének origója ($\underline{x}=\underline{0}$) egyensúlyi állapot. A rendszer $\underline{x}=\underline{0}$ egyensúlyi állapota stabil, ha az állapotok nem távolodnak el végtelenül az origótól. Ha az állapotok nullába konvergálnak, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer aszimptotikusan stabil. A pontos matematikai megfogalmazáshoz vezessük be a norma fogalmát, vagyis az állapot távolságát az origótól:

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{10.7}$$

Stabilitás: $\underline{x}=\underline{0}$ stabil egyensúlyi állapot a $t=t_0$ időpillanatban, ha bármely $R>0$-ra létezik $r(R,t_0)>0$ úgy, hogy ha $\|\underline{x}(t_0)\|<r$ akkor $\|\underline{x}(t)\|<R$ bármely $t> t_0$.
Aszimptotikus stabilitás: $\underline{x}=\underline{0}$ stabil egyensúlyi állapot a $t=t_0$ időpillanatban, ha létezik $r(t_0) >0$ úgy, hogy ha $\|\underline{x}(t_0)\|<r$ akkor $\|\underline{x}(t)\|\to 0$, ha $t\to\infty$.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.1 Ábra: Stabilitás (I) és aszimptotikus stabilitás (II) fázistérben**

A definíciók illusztrálása a 10.2 Ábrán látható. Az ábrán egy másodfokú stabil rendszer és egy másodfokú aszimptotikusan stabil rendszer fázistere látható. Stabil esetben ha a kezdeti időpillanatban az állapotok véges távolságra vannak az állapottér origójától, akkor bármely kezdeti állapot utáni időpillanatban is véges távolságra maradnak az origótól. Aszimptotikusan stabil esetben, ha a kezdeti időpillanatban az állapotok véges távolságra vannak az állapottér origójától, akkor konvergálnak az origóhoz.
A nemlineáris dinamikus rendszerek stabilitásának vizsgálatához a *Lyapunov tételt* alkalmazhatjuk:
Ha létezik egy olyan $V(\underline{x}, t)$ függvény amely deriválható $\underline{x}=\underline{0}$ egyensúlyi pont körül, és legyenek az alábbi feltételek:

I. $V(\underline{0}, t)=0$ *és* $V(\underline{x}, t)>0$, *ha* $\underline{x}\neq\underline{0}$ *(*$V(\underline{x}, t)$ *pozitív definit)*

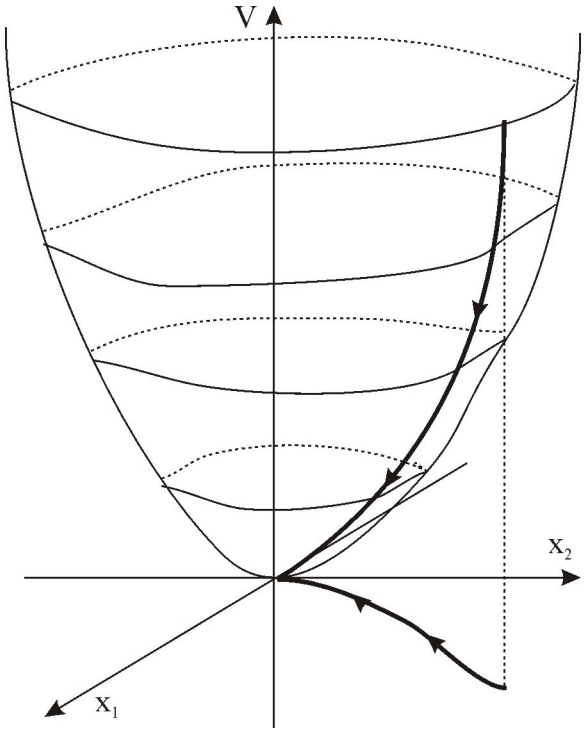
II.a $\dot{V}(\underline{x},t) \le 0$ *(*$\dot{V}(\underline{x},t)$ *negatív szemidefinit)*

II.b $\dot{V}(\underline{x},t) < 0$ *(*$\dot{V}(\underline{x},t)$ *negatív definit)*

Ha az I. és a II.a feltétel teljesül, akkor a rendszer stabil, ha az I. és a II.b feltétel teljesül, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil.

A Lyapunov tételben szereplő V függvény a vizsgált rendszerhez rendelt energiafüggvény. Az I. feltétel szerint értéke mindig pozitív, így a legkisebb érték amit felvehet: 0. A II.a feltétel értelmében a V függvény nem növekvő, tehát mindig véges értékű, a II.b függvény értelmében pedig a V csökkenő függvény. Ha V pozitív és csökkenő akkor nullába kell konvergáljon.

A Lyapunov tétel illusztrálása aszimptotikus stabilitásra másodfokú rendszer esetén az 10.3 Ábrán látható. Ha a *V* függvény értéke időben csökken, nulla fele konvergál. Ennek megfelelően a rendszer állapotai is nulla fele kell konvergáljanak.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban..2 Ábra: A Lyapunov tétel illusztrálása

Nemlineáris irányítás modellbizonytalanságok jelenlétében

Számos irányítási alkalmazásnál az irányított rendszerben a nemlinearitás pontatlanul ismert vagy akár ismeretlen. Ebben az esetben a visszacsatolásos linearizáláson alapuló technika egyenes úton nem alkalmazható, a nemlinearitás hatásának kompenzálásához a szabályozót módosítani kell. A feladat megoldásához két stratégiát alkalmazhatunk: vagy a szabályozót úgy tervezzük meg, hogy pontatlanul ismert nemlinearitás esetén is garantálja a zárt rendszer stabilitását és a szabályozási pontosságot (*csúszó szabályozás*) vagy a szabályozót kibővítjük olyan formában, hogy irányítás közben becsülje meg az ismeretlen nemlinearitást (*adaptív szabályozás*). Minél pontosabban sikerül megbecsülni a nemlinearitást, annál pontosabbá válik a szabályozás. A csúszó szabályozást akkor alkalmazhatjuk, ha a nemlinearitás adott pontossággal ismert, az adaptív szabályozók akkor is alkalmazhatóak, ha a nemlinearitás teljesen ismeretlen. Adaptív szabályozók esetén azonban a szabályozó struktúrája bonyolultabb, az irányítást nehezebb megvalósítani.

Kétféle modellbizonytalanságot különböztethetünk meg: *strukturális* és *nemstrukturális* modellbizonytalanságot. Strukturális modellbizonytalanság esetén a bizonytalanság beépíthető a rendszer modelljébe. Ilyen például, ha a rendszer egyik paraméterét nem

ismerjük pontosan. Ha egy másodfokú lengőrendszer esetén a súrlódási paraméter pontatlanul ismert, a rendszer modelljét az alábbi módon írhatjuk fel:

$$m\ddot{x} + (k_F + \Delta k_F)\dot{x} + k_R x = u \tag{10.52}$$

A modellben k_F a pontatlanul ismert paraméter értéke nem egyezik a valós irányított rendszer súrlódási együtthatójával. Ezt úgy jelöljük, hogy a pontatlanul ismert paraméterhez hozzáadunk egy Δk_F paraméter-bizonytalanságot, amelynek értéke ismeretlen. $k_F+\Delta k_F$ egyenlő a valós, de ismeretlen paraméterrel.
Nem strukturális bizonytalanság esetén a bizonytalanság nem építhető bele a rendszer modelljébe. Ilyen például a fokszám eltérés: Az irányítás tervezéséhez alkalmazott modell fokszáma nem egyezik meg a valós irányított rendszer fokszámával.
A csúszó szabályozás és adaptív szabályozás tervezésénél feltételezzük, hogy a modellbizonytalanság strukturális.

Csúszó szabályozás

Legyen (10.2) az irányított rendszer dinamikáját leíró modell. A folyamatmodellben megjelenő f és g nemlinearitások pontatlanul ismeretek. A modellbizonytalanságot kétféle módon adhatjuk meg:
Additív modellbizonytalanság:

$$f(\underline{x}) = \hat{f}(\underline{x}) + \Delta f(\underline{x}) \tag{10.53}$$

f jelöli a valós nemlinearitás értékét. $\hat{f}$ jelöli a szabályozóban alkalmazott nemlinearitás értékét. Az eltérést a valós és az alkalmazott nemlinearitás-értékek között a Δf modellbizonytalanság adja, amelynek értéke ismeretlen. Ebben az esetben a modellbizonytalanság mértékegysége megegyezik a modell nemlinearitásának mértékegységével.
Multiplikatív modellbizonytalanság:

$$g(\underline{x}) = \hat{g}(\underline{x})\left(1 + \Delta g(\underline{x})\right) \tag{10.54}$$

Ebben az esetben az ismeretlen Δg modellbizonytalanság értékét százalékban adjuk meg.
Ahhoz, hogy a csúszó szabályozást alkalmazni tudjuk, a modellbizonytalanságok értékei korlátosak kell, hogy legyenek:

$$\left|\Delta f(\underline{x})\right| \le \Delta F_M \tag{10.55}$$

$$\left|\Delta g(\underline{x})\right| \le \Delta G_M \tag{10.56}$$

Az irányítás tervezésénél feltételezük, hogy az ΔF_M és ΔG_M korlátok ismertek. A szabályozó megvalósíthatóságának feltétele, hogy ezen felső korlátok értékei kisebbek

legyenek, mint a szabályozóban alkalmazott $\hat{f}$ és $\hat{g}$ nemlinearitás-értékek (multiplikatív bizonytalanság esetén százalékos nagyságrendben kell kis érték legyen). Például multiplikatív bizonytalanság esetén, ha a korlát *100%* körül van, akkor a csúszó szabályozó alkalmazása nem javasolt az irányítási feladat megoldására, adaptív szabályozást kell alkalmazni. A csúszószabályozás alkalmazásához elfogadható például, ha a bizonytalanság értéke *10%* körül van.

Az irányítási feladat megfogalmazása: legyen a folyamatot leíró modell (10.2) amelyben a nemlinearitások pontatlanul ismertek. Az f nemlinearitás bizonytalanságát additív, a g nemlinearitás bizonytalanságát multiplikatív formában adjuk meg ((10.53), (10.54) összefüggések). A nemlinearitások bizonytalanságai korlátosak, ismert korláttal ((10.55), (10.56) összefüggések). Legyen egy y_d n-szer deriválható időfüggvény, a rendszer előírt kimenete. Keressük az u beavatkozó jelet úgy, hogy a folyamat y kimenete előírt pontossággal kövesse az y_d pályát.

Jelölje $e(t)=y_d(t)-y(t)$ a pályakövetési hibát. Az irányítási feladat megoldásához vezessük be az alábbi összetett hibát:

$$S(y,t)=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n-1} e(t), \quad \lambda>0 \tag{10.57}$$

$n=2$ esetén:

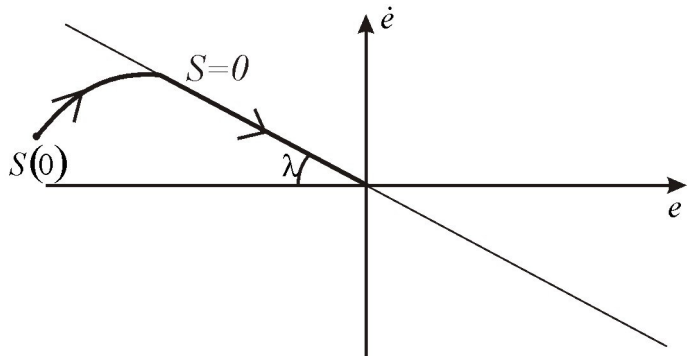
$$S(y,t)=\frac{de}{dt}+\lambda e, \quad \lambda>0 \tag{10.58}$$

$n=3$ esetén:

$$S(y,t)=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{2} e=\frac{d^2e}{dt^2}+2\lambda\frac{de}{dt}+\lambda^2 e, \quad \lambda>0 \tag{10.59}$$

Az $S(y,t)=0$ n-ed fokú stabil differenciál-egyenlet, az összes gyöke $s_i=-1/\lambda$. Ugyanakkor a hiba fázisterében az $S=0$ egy, a zérón áthaladó felületet definiál - *csúszófelület* (lásd 10.9 Ábra).

Ha a szabályozás biztosítja, hogy az $S=0$ feltétel teljesüljön, akkor az e pályakövetési hiba nullába fog konvergálni. A csúszó szabályozó azt biztosítja, hogy *az S értéke bármely kezdőállapotból véges idő alatt eljusson az S=0 csúszófelületre és rajta is maradjon*. Ha ez teljesül, akkor a hiba nullába fog konvergálni, mivel az $S=0$ stabil differenciálegyenlet e megoldása bármely kezdőállapotból nullába konvergál. A csúszó szabályozás elvét a 10.9 Ábra szemlélteti.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.3 Ábra: A csúszó szabályozás elve**

Az irányítási feladat megoldásához egy Lyapunov- szerű tételt alkalmazunk: Legyen az alábbi Lyapunov függvény:

$$V(\underline{x},t)=\frac{1}{2}S^2 \tag{10.60}$$

A függvény deriváltja:

$$\dot{V}(\underline{x},t)=S\cdot\dot{S} \tag{10.61}$$

Ha a Lyapunov függvény deriváltja teljesíti az alábbi feltételt, akkor S bármely kezdőállapotból véges idő alatt eléri az $S=0$ csúszófelületet:

$$S\cdot\dot{S}\le-\eta\cdot|S|,\quad \eta>0 \tag{10.62}$$

A fenti feltételt *csúszó feltételnek* is nevezzük. A fenti kijelentés bizonyításához feltételezzük, hogy S értéke a kezdőállapotban pozitív ($S(0)>0$). Integráljuk az (10.62) összefüggés mindkét oldalát a $t=0$ pillanattól a t_{reach} pillanatig, amelyben az S értéke eléri az $S(t_{reach})=0$ csúszófelületet:

$$\int_0^{t_{reach}} S\dot{S}(t)dt\le-\int_0^{t_{reach}}\eta|S|dt \tag{10.63}$$

Mivel feltételeztük, hogy az S értéke pozitív ($|S|=S$), kapjuk:

$$\int_0^{t_{reach}} \dot{S}(t)dt\le-\int_0^{t_{reach}}\eta dt \tag{10.64}$$

Innen egyszerűen kapjuk:

$$\underbrace{S(t_{reach})}_{=0} - S(0) \le -\eta(t_{reach} - 0) \tag{10.65}$$

Fejezzük ki a t_{reach} értékét az (10.65) összefüggésből:

$$t_{reach} \le \frac{s(0)}{\eta} \tag{10.66}$$

Tehát ha az (10.62) csúszó feltétel teljesül, a t_{reach} értéke véges, az S összetett hiba véges idő alatt eléri az $S=0$ csúszófelületet.
A beavatkozó jelet úgy keressük, hogy a csúszó feltétel teljesüljön korlátos modellbizonytalanság mellet is. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az irányított rendszer másodfokú:

$$\ddot{y} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u \tag{10.67}$$

A másodfokú modellnél az összetett hibát a (10.58) összefüggés definiálja. Számítsuk ki az összetett hiba deriváltját:

$$\dot{S} = \frac{d}{dt}\left(\frac{de}{dt} + \lambda \cdot e\right) = \frac{d^2 e}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{de}{dt} = \frac{d^2 y_d}{dt^2} - \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{de}{dt} = \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - f(\underline{x}) - g(\underline{x})u \tag{10.68}$$

Mivel f és g ismeretlen, a beavatkozó jelet az $\hat{f}$ és $\hat{g}$ nemlinearitás-értékek függvényében fogalmazzuk meg:

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\underline{x})}\left(-\hat{f}(\underline{x}) + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - K \cdot \mathrm{sgn}(S)\right) \tag{10.69}$$

sgn a szignum kapcsolófüggvényt jelöli:

$$\mathrm{sgn}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \\ 0, & S = 0 \\ -1, & S < 0 \end{cases}$$

Keressük úgy a K erősítés értékét, hogy a csúszó feltétel teljesüljön. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$u_{IN} = -\hat{f}(\underline{x}) + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} \tag{10.70}$$

Helyettesítsük be a (10.69) beavatkozó jelet az összetett hiba (10.68) deriváltjába, majd adjuk hozzá és vonjuk is ki az u_{IN} értéket a deriváltból:

$$\dot{S} = \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - f(\underline{x}) - \frac{g(\underline{x})}{\hat{g}(\underline{x})} \cdot \left(u_{IN} - K \cdot \mathrm{sgn}(S)\right)$$

$$\dot{S} = \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - f(\underline{x}) - u_{IN} + u_{IN} - \frac{g(\underline{x})}{\hat{g}(\underline{x})} u_{IN} + \frac{g(\underline{x})}{\hat{g}(\underline{x})} \cdot K \cdot \mathrm{sgn}(S)$$

$$\dot{S} = \underbrace{\hat{f}(\underline{x}) - f(\underline{x})}_{-\Delta f(\underline{x})} + \underbrace{\left(1 - \frac{g(\underline{x})}{\hat{g}(\underline{x})}\right)}_{-\Delta g(\underline{x})} \cdot u_{IN} + \underbrace{\frac{g(\underline{x})}{\hat{g}(\underline{x})}}_{1+\Delta g(\underline{x})} \cdot K \cdot \mathrm{sgn}(S) \tag{10.71}$$

Helyettesítsük be a (10.71) összefüggést a (10.62) csúszó feltételbe:

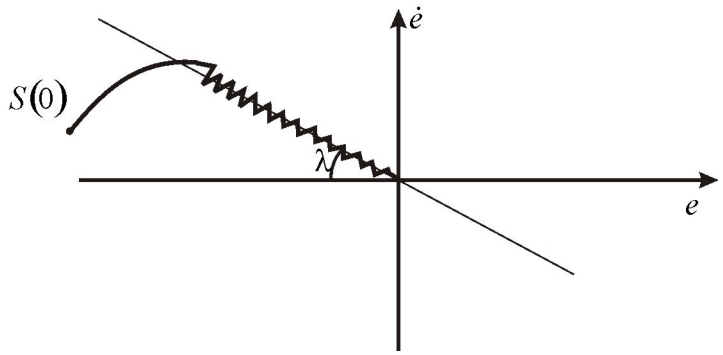
$$\begin{aligned} S \cdot \dot{S} &\le |S| \cdot |\dot{S}| = |S| \cdot \left(-\Delta f(\underline{x}) - \Delta g(\underline{x}) \cdot u_{IN} + \left(1 + \Delta g(\underline{x})\right) K \,\mathrm{sgn}(S)\right) \le \\ &\le |\Delta f| \cdot |S| + |\Delta g| \cdot |u_{IN}| \cdot |S| + |1 + \Delta g(\underline{x})| \cdot K \cdot |S| \le \\ &\le \underbrace{\left(\Delta f_M + \Delta g_M |u_{IN}| + (1 + \Delta g_M) K\right)}_{-\eta} \cdot |S| \end{aligned} \tag{10.72}$$

Ahhoz, hogy a csúszó feltétel teljesüljön, a (10.72) alapján kapjuk az állapotfüggő erősítés értékét:

$$\begin{aligned} \Delta f_M + \Delta g_M |u_{IN}| + (1 + \Delta g_M) K = -\eta \quad &\Rightarrow \\ K = \frac{-1}{1 + \Delta g_M} \left(\Delta f_M + \Delta g_M |u_{IN}| + \eta\right) \end{aligned} \tag{10.73}$$

A pontossági sáv

Az (10.69) formában számított beavatkozó jelnek hátránya, hogy a szignum kapcsolófüggvény nagy erősítése és az irányított rendszer tehetetlensége miatt az összetett hiba túllő az *S=0* csúszófelületen, majd a zéróhoz történő konvergencia alatt is nagyfrekvenciás kapcsoló-üzemmódra számíthatunk a csúszófelület körül (lásd 10.10 Ábra). Ezt hívjuk a *csattogás* jelenségének. A csattogás miatt a folyamat kimenete ugyancsak nagyfrekvenciás lengéseket mutat az előírt pálya körül.



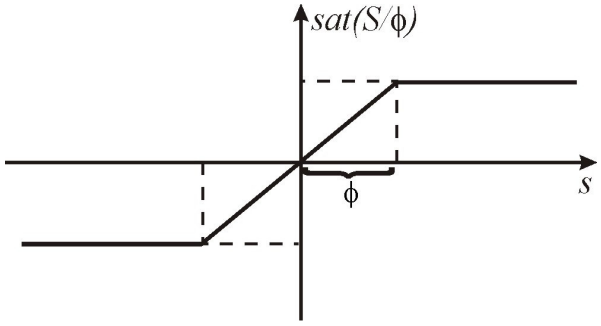
Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.4 Ábra: A csattogás jelensége**

A csattogás elkerüléséhez a beavatkozó jelet módosítanunk kell. Feltételezzük, hogy állandósult állapotban elvárt, hogy az összetett hiba előírt pontossággal közelítse meg a csúszófelületet ahelyett, hogy pontosan rákonvergáljon:

$$\left|S(\underline{x},t)\right| \le \phi \tag{10.74}$$

Ennek garantálására, amíg az összetett hiba a pontossági sávon kívül van, a szignum kapcsolófüggvényt alkalmazzuk az irányításnál. Amikor a pontossági sáv belsejében vagyunk, a beavatkozó jelet választhatjuk az összetett hibával arányosnak. Tehát a szignum kapcsolófüggvényt szaturáció függvénnyel helyettesítjük (lásd 10.11 Ábra):

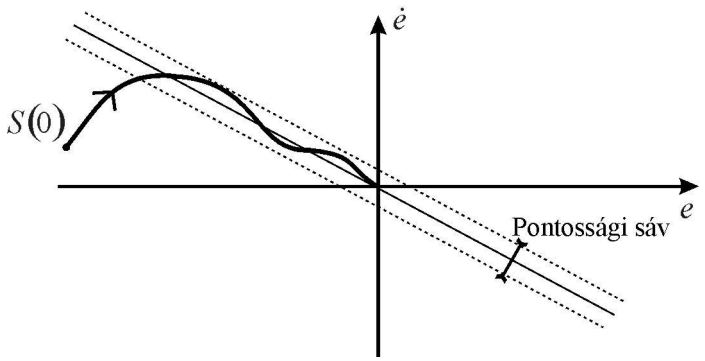
$$sat(S/\phi) = \begin{cases} +1, & S > \phi \\ S/\phi, & |S| \le \phi \\ -1, & S < -\phi \end{cases} \tag{10.75}$$



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.5 Ábra: Csúszó szabályozáshoz alkalmazott szaturáció függvény**

A módosítás eredménye az lesz, hogy a csúszófelülethez közel a beavatkozó jel csak a hibával arányos kis értéket fog felvenni, így a túllövés kisebb lesz, elégségesen széles

pontossági sáv választása esetén a nagyfrekvenciás kapcsolás megszűnik (lásd 10.12 Ábra).



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.6 Ábra: Csúszó szabályozás pontossági sáv beiktatásával**

Természetes kérdés, hogy az elvárt pályakövetési pontosság függvényében hogyan válaszuk meg az összetett hiba pontosságának ϕ értékét. A pályakövetési pontosság becslésére a (10.58) összefüggést alkalmazhatjuk. Feltételezve, hogy a pályakövetési hiba állandósult állapotban csak kis változást mutat, a deriváltja zéró lesz. Tehát:

$$|\lambda \cdot e| \le \phi \;\Rightarrow\; |e| \le \frac{\phi}{\lambda} \tag{10.76}$$

A (10.76) egyenlőtlenség alapján az elvárt pályakövetési pontosságnak megfelelően megválaszthatjuk a ϕ értéket.

Összefoglalva, a *csúszó szabályozás megvalósítási lépései*:
Mért: $y, \dot{y} \Rightarrow \underline{x} = (y \quad \dot{y})^T$

Adott: $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, \quad \lambda, \phi, \eta, \quad \hat{f}, \hat{g}, \Delta f_M, \Delta g_M$

Kiszámítjuk S-t: $S = (\dot{y}_d - \dot{y}) + \lambda(y_d - y)$

Kiszámítjuk u_{IN}-t: $u_{IN} = -\hat{f}(\underline{x}) + \ddot{y}_d + \lambda \cdot (\dot{y}_d - \dot{y})$

Kiszámítjuk K-t: $K = \dfrac{-1}{1 + \Delta g_M}\left(\Delta f_M + \Delta g_M |u_{IN}| + \eta\right)$

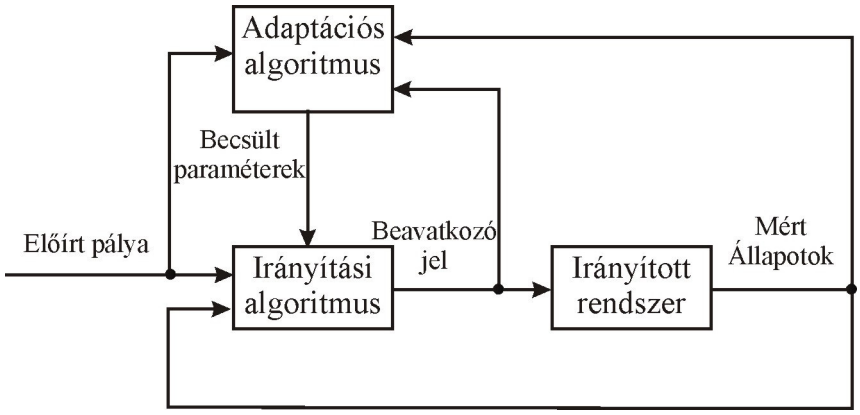
Kiszámítjuk u-t: $u = \dfrac{1}{\hat{g}}\left(-\hat{f} + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - K \cdot sat(S/\phi)\right)$

A csúszó szabályozási algoritmus tervezési lépéseiből az alábbi, nagyon fontos, irányítási feladatoknál általában is igaz következtetéseket vonjuk le.

- Minél nagyobb a modellbizonytalanság, annál nagyobb szabályozó erősítést kell válasszunk.
- Minél nagyobb az elvárt pályakövetési pontosság, annál nagyobb szabályozó erősítést kell válasszunk.
- Minél nagyobb a modellbizonytalanság, annál kisebb pályakövetési pontosságra számíthatunk.
- Minél nagyobb a szabályozó erősítése, annál gyorsabb lesz a rendszer válasza.

Nemlineáris adaptív irányítás

Adaptív irányítást akkor célszerű alkalmazni, ha az irányított rendszer paraméterei ismeretlenek vagy időben lassan változnak. Tipikus példa a robotkarok adaptív irányítása, ha a mozgatott tárgy tömege, inerciája ismeretlen és/vagy a robotkar csuklóiban a súrlódási paraméterek ismeretlenek. Ha a szabályozó nem veszi figyelembe az ismeretlen paramétereket, a szabályozás pontossága romlik, rosszabb szabályozási tranziensekre számíthatunk.
Az adaptív szabályozó két részből áll (lásd 10.13 Ábra):
- Adaptációs algoritmus: a rendszer bemenete, mért kimenete valamint előírt pályája alapján megbecsüli az ismeretlen paramétereket.
- Irányítási algoritmus: a becsült paraméterek, és mért jelek alapján meghatározza a beavatkozó jelet.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.7 Ábra: Adaptív irányítási rendszer**

Az irányítás az indításkor pontatlan, a szabályozási minőség gyenge. Azonban, ha az adaptációs törvény minél pontosabban megbecsüli az ismeretlen rendszer paramétereit az irányítási algoritmus, annál pontosabb irányítást biztosít.

Lineárisan paraméterezett nemlinearitások

Ahhoz, hogy az adaptív szabályozást alkalmazni tudjuk nemlineáris rendszerekre, a folyamat nemlinearitásai lineárisan paraméterezett formában kell legyenek: a nemlinearitás felírható kell legyen egy ismeretlen paramétervektor és egy ismert regresszorvektor skalár szorzataként.

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i \cdot \varphi_i(\underline{x}) = \underline{\theta}^T \cdot \underline{\varphi}(\underline{x}) \tag{10.77}$$

$\underline{\theta}$ *- paramétervektor*

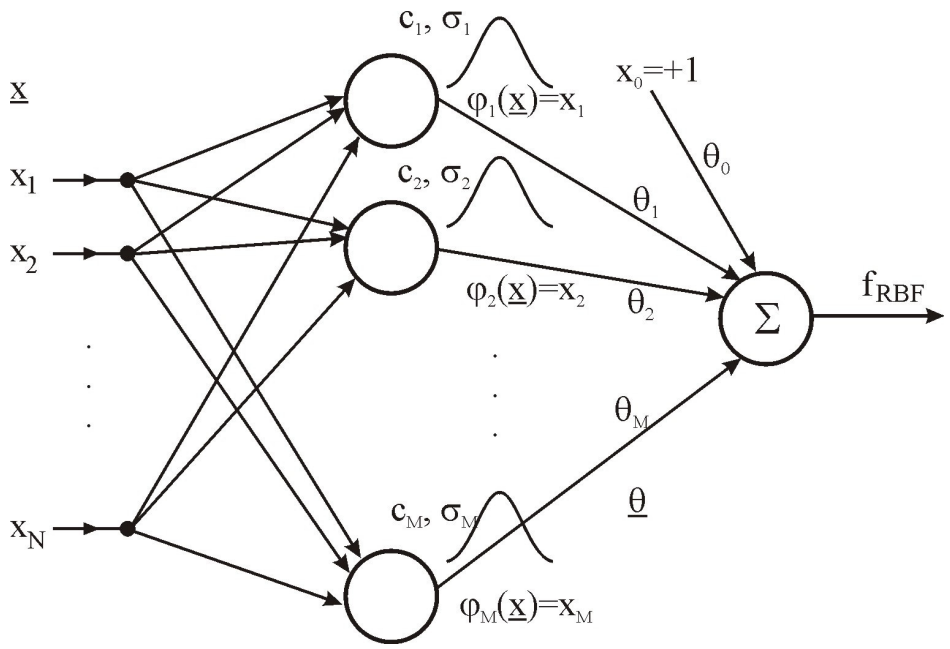
$\underline{\varphi}(\underline{x})$ *- regresszorvektor*

M a paraméterek számát jelöli. A regresszorvektor függhet a rendszer mért állapotaitól.
Példának feltételezzük, hogy a *v* sebességgel mozgó, a kezdőpozíciótól *x* távolságra levő mechanikai rendszerre rugalmassági és centrifugális erő hat. Ismeretlenek a test tömege (*m*), a rugóállandó (k_R). A forgómozgás sugara legyen *x*. Ebben az esetben az ismeretlen erőhatások összege felírható lineárisan paraméterezett formában:

$$f(\underline{x}) = k_R x + \frac{mv^2}{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_R & m \end{pmatrix}}_{\underline{\theta}_f}^T \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \frac{v^2}{x} \end{pmatrix}}_{\underline{\varphi}_f} = \underline{\theta}_f{}^T \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}) \tag{10.78}$$

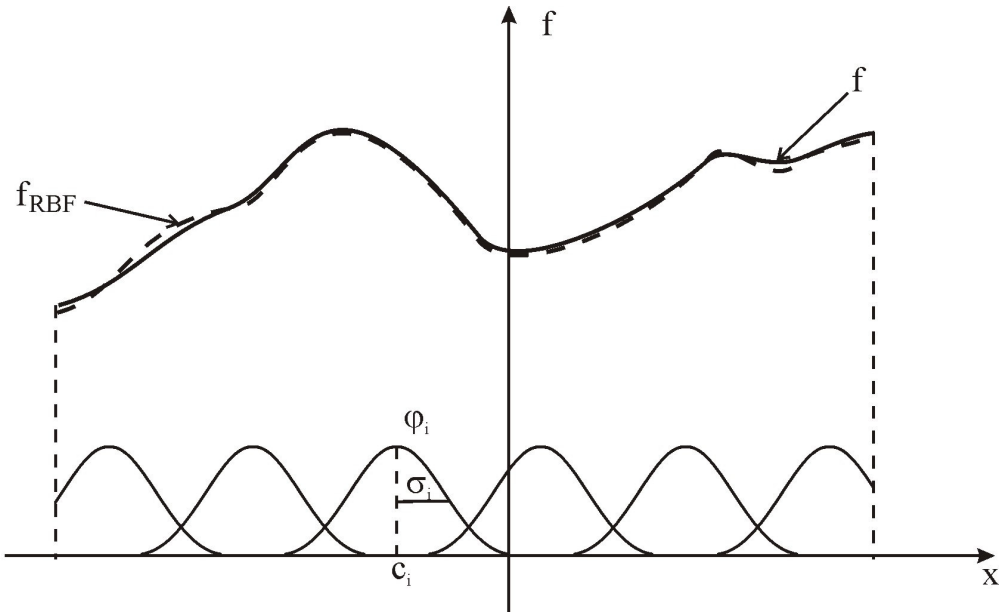
Általában a folyamat nemlinearitása nem írható fel lineárisan paraméterezett formában. Ha például a nemlinearitás szinuszos $f(x)=sin(2\pi fx)$ és az ismeretlen paraméter az *f* frekvencia, akkor a paraméter nem különíthető el a (10.77) formában.
Ebben az esetben a nemlineáris függvényt univerzális approximátorokkal közelíthetjük meg, amelyek lineárisan paraméterezett formában írhatóak fel. Adaptív irányításoknál elterjedt a radiális bázisfüggvényeket alkalmazó neuronhálókkal (RBF) való approximáció. Ennek oka a jó approximációs tulajdonságuk (bizonyítható, hogy folytonos nemlinearitások esetén létezik olyan RBF háló, amely tetszőleges pontossággal megközelíti a nemlinearitást), valamint hogy egyszerűen implementálhatóak, mivel viszonylag kevés számú paramétert tartalmaznak. Az egy-kimenetű RBF neuronhálók kimenete tulajdonképpen Gauss függvények súlyozott összege (lásd 10.14 Ábra):

$$f_{RBF}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{M} \theta_j \cdot \varphi_j(\underline{x}) = \underline{\theta}^T \cdot \underline{\varphi}(\underline{x}), \quad \underline{\varphi}_j(\underline{x}) = \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_{ij})^2}{2\sigma_j^2} \right) \tag{10.79}$$



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban..**8 Ábra: Egyrétegű egy kimenetű RBF neurális hálózat**

M a paraméterek, valamint a Gauss függvények számát jelöli. c_{ij} a Gauss függvények középpontjai, σ_j^2 a Gauss függvények szélességparamétere.
A $\underline{\theta}$ súlyzó-paramétervektort ismeretlennek tekintjük, a Gauss függvény paramétereit ismertnek tekintjük. Ezeket a c_{ij} valamint σ_j paramétereket a szabályozás előtt már meg kell választani. A választás történhet úgy, hogy a Gauss függvények egyenletesen lefedjék az állapotteret. Ezt egy állapot esetén a 10.15 Ábra szemlélteti.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.9 Ábra: Approximáció RBF neurális hálózattal**

Tehát az irányításnál, ha a folyamat nemlinearitása nemlineárisan paraméterezett, RBF hálózattal közelíthetjük meg, amelynek az ismeretlen $\underline{\theta}$ paramétereit az adaptációs törvény keresi meg: $f(\underline{x}) \cong f_{RBF}(\underline{x})$.

Az adaptív irányítás tervezése és megvalósítása

Az irányítást másodfokú nemlineáris rendszerre lesz bemutatva:

$$\ddot{y} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u \tag{10.80}$$

Legyen a kimenet előírt pályája y_d, a pályakövetési hiba e, az összetett hiba S:

$$e = y_d(t) - y(t)$$
$$S = \frac{de}{dt} + \lambda \cdot e \tag{10.81}$$

Először fogalmazzuk meg az irányítási törvényt az ismeretlen f és g nemlinearitások függvényében. Keressük úgy az u beavatkozó jelet, hogy az S nemlinearitás kielégítse az alábbi elsőfokú lineáris, homogén differenciálegyenletet:

$$\dot{S} + K \cdot S = 0, \quad K > 0 \tag{10.82}$$

Ha S kielégíti a (10.82) összefüggést akkor bármely kezdőállapotból konvergálni fog nullába, mivel $K>0$ esetén (10.82) stabil differenciálegyenlet ($S \to 0$, ha $t \to \infty$).
Az összetett hiba változása:

$$\dot{S} = \frac{d^2e}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{de}{dt} = \ddot{y}_d - \ddot{y} + \lambda \cdot \dot{e} = \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} - f(\underline{x}) - g(\underline{x})u \tag{10.83}$$

Válasszuk a beavatkozó jelet az alábbi formában:

$$u = \frac{1}{g(\underline{x})}\left(-f(\underline{x}) + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} + K \cdot S\right), \quad K > 0 \tag{10.84}$$

u-t visszahelyettesítve a (10.83) összefüggésbe kapjuk, hogy $\dot{S} = -K \cdot S$, tehát a (10.84) beavatkozó jel garantálja a (10.82) feltételt.
Mivel az f és g ismeretlenek, a (10.84) beavatkozó jel egyenes úton nem alkalmazható. Közelítsük meg a nemlinearitásokat a (10.79) -ben bevezetett RBF neuronhálóval:

$$f(\underline{x}) \cong f_{RBF}(\underline{x}) = \underline{\theta}_f^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x})$$

$$g(\underline{x}) \cong g_{RBF}(\underline{x}) = \underline{\theta}_g{}^T \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \tag{10.85}$$

A $\underline{\theta}_f, \underline{\theta}_g$ paramétervektorok ismeretlenek. Az adaptációs algoritmus feladata az ismeretlen paraméterek meghatározása. Jelölje $\hat{\underline{\theta}}_f, \hat{\underline{\theta}}_g$ az adaptációs algoritmusok által számított, *becsült paramétereket*. Legyen a *paraméterbecslési hiba*:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\theta}}_f &= \underline{\theta}_f - \hat{\underline{\theta}}_f \\ \tilde{\underline{\theta}}_g &= \underline{\theta}_g - \hat{\underline{\theta}}_g \end{aligned} \qquad \text{……..(10.86)}$$

$$\tilde{\underline{\theta}}_f = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_{1f} \\ \tilde{\theta}_{1f} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{Mf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{1f} - \hat{\theta}_{1f} \\ \theta_{1f} - \hat{\theta}_{2f} \\ \vdots \\ \theta_{Mf} - \hat{\theta}_{Mf} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\underline{\theta}}_g = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_{1g} \\ \tilde{\theta}_{1g} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{Mg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{1g} - \hat{\theta}_{1g} \\ \theta_{1g} - \hat{\theta}_{2g} \\ \vdots \\ \theta_{Mg} - \hat{\theta}_{Mg} \end{pmatrix}$$

Az adaptációs és irányítási törvények meghatározásához a Lyapunov tételt alkalmazzuk. Legyen az alábbi Lyapunov függvény:

$$V = \frac{1}{2} S^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_f} \frac{1}{\gamma_{fi}} \tilde{\theta}_{if}{}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_g} \frac{1}{\gamma_{gi}} \tilde{\theta}_{ig}{}^2, \qquad \gamma_{fi}, \gamma_{gi} > 0 \, \forall \, i \tag{10.87}$$

V pozitív definit, vagyis mindig pozitív, ha az összetett hiba és paraméterbecslési hibák nem zérók. Keressük úgy a beavatkozó jelet, hogy V időbeli deriváltja nulla legyen. Mivel a rendszer paramétereit időben konstansnak feltételezzük, a paraméterbecslési hiba deriváltja: $\dot{\tilde{\theta}}_{fi} = \dot{\theta}_{fi} - \dot{\hat{\theta}}_{fi} = -\dot{\hat{\theta}}_{fi}$. Ezt felhasználva a Lyapunov függvény deriváltja:

$$\dot{V} = \dot{S} \cdot S - \sum_{i=1}^{M_f} \frac{1}{\gamma_{fi}} \tilde{\theta}_{fi} \dot{\hat{\theta}}_{fi} - \sum_{i=1}^{M_g} \frac{1}{\gamma_{fi}} \tilde{\theta}_{gi} \dot{\hat{\theta}}_{gi} \tag{10.88}$$

Az S összetett hiba deriváltját a (10.83) összefüggés adja. Alkalmazva a (10.85) RBF megközelítéseket kapjuk:

$$\dot{S} = -\underline{\theta}_f{}^T \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_g{}^T \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} \tag{10.89}$$

Válasszuk a beavatkozó jelet a (10.84) formában, ahol az ismeretlen nemlinearitásokat az RBF neuronháló approximálja. Mivel a neuronháló paraméterei ismeretlenek, helyettesítsük az ismeretlen paramétereket a becsült értékeikkel:

$$u = \frac{1}{\hat{\underline{\theta}}_g{}^T \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x})} \left(-\hat{\underline{\theta}}_f{}^T \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}) + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} + K \cdot S \right) \quad K > 0 \tag{10.90}$$

Adjuk hozzá és vonjunk ki a (10.89) összefüggésből a $\underline{\hat{\theta}}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u - \underline{\hat{\theta}}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u$ tagot:

$$\dot{S} = -\underline{\theta}_f^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u + \underline{\hat{\theta}}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u - \underline{\hat{\theta}}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u + \ddot{y}_d + \lambda \cdot \dot{e} \tag{10.91}$$

Behelyettesítve a (10.90) beavatkozó jelet a (10.91) összefüggésbe, kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\underline{\tilde{\theta}}_f^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}) - \underline{\tilde{\theta}}_g^{\,T} \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}) \cdot u - K \cdot S = \\ &= -\sum_{i=1}^{M_f} \tilde{\theta}_{fi} \varphi_{fi}(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{M_g} \tilde{\theta}_{gi} \varphi_{gi}(\underline{x}) - K \cdot S \end{aligned} \tag{10.92}$$

Behelyettesítve a (10.92) összefüggést a Lyapunov függvény (10.88) deriváltjába, kapjuk:

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^{M_f} \tilde{\theta}_{fi} \varphi_{fi}(\underline{x}) S - \sum_{i=1}^{M_g} \tilde{\theta}_{gi} \varphi_{gi}(\underline{x}) S - K \cdot S^2 - \sum_{i=1}^{M_f} \frac{1}{\gamma_{fi}} \tilde{\theta}_{fi} \dot{\hat{\theta}}_{fi} - \sum_{i=1}^{M_g} \frac{1}{\gamma_{fi}} \tilde{\theta}_{gi} \dot{\hat{\theta}}_{gi} \tag{10.93}$$

Válasszuk az adaptációs törvényeket:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{fi} = -\gamma_{fi} \underline{\varphi}_{fi}(\underline{x}) \cdot S \\ \dot{\hat{\theta}}_{gi} = -\gamma_{gi} \underline{\varphi}_{gi}(\underline{x}) \cdot u \cdot S \end{cases} \tag{10.94}$$

Visszahelyettesítve az adaptációs törvényeket a Lyapunov függvény deriváltjába, kapjuk:

$$\dot{V} = -K \cdot S^2 \tag{10.95}$$

Tehát a (10.90) beavatkozó jel a (10.94) adaptációs törvényekkel garantálják, hogy a Lyapunov függvény deriváltja negatív legyen és így az összetett hiba a nullába konvergáljon.

Az adaptív irányítási algoritmus megvalósítása

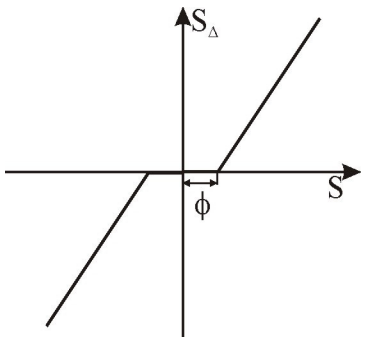
Az adaptációs algoritmus mintavételes megvalósításához a numerikus deriválást alkalmazhatjuk:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{fi} \cong \dfrac{\hat{\theta}_{fik+1} - \hat{\theta}_{fik}}{T} \\ \dot{\hat{\theta}}_{fi} = -\gamma_{fi} \varphi_{fi}(\underline{x}) \cdot S \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta}_{fik+1} = \hat{\theta}_{fik} - T \cdot \gamma_{fi} \varphi_{fi} \cdot S \tag{10.96}$$

T az alkalmazott mintavételi periódust jelöli. Mivel a Lyapunov függvény deriváltja bármely γ_{fi} pozitív értékre negatívvá válik, T beleolvasztható γ_{fi} -be.

A (10.96) összefüggés alapján látszik, hogy az adaptációs törvény integráló jellegű: a becsült paraméterek értékei mindaddig változnak, amíg S nem válik teljesen nullává. Ennek a feltételnek az elkerüléséhez vezessünk be egy elvárt pontossági sávot az S összetett hibának (ϕ). Ha S abszolút értéke kisebb lesz mint ϕ, az adaptációt nem működtetjük. Ez úgy oldható meg, hogy az adaptációs törvényekben az S értékét lecseréljük az S_Δ függvényre (lásd 10.16 Ábra):

$$S_\Delta = \begin{cases} S-\phi, & S>\phi \\ 0, & |S| \le \phi \\ S+\phi, & S<-\phi \end{cases} \tag{10.97}$$



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.10 Ábra: Módosított hiba az adaptációs törvényekhez**

Az irányítás indításakor, mivel a becsült paraméterek ismeretlenek, a legelső mintavételben célszerű a paramétereket ($\underline{\hat{\theta}}_{f_0}, \underline{\hat{\theta}}_{g_0}$) úgy választani, hogy a beavatkozó jel lineáris része ($K \cdot S$) legyen domináns. Ezt olyan paraméterválasztással érhetjük el, hogy a becsült f értéke nulla, a becsült g értéke 1 legyen.

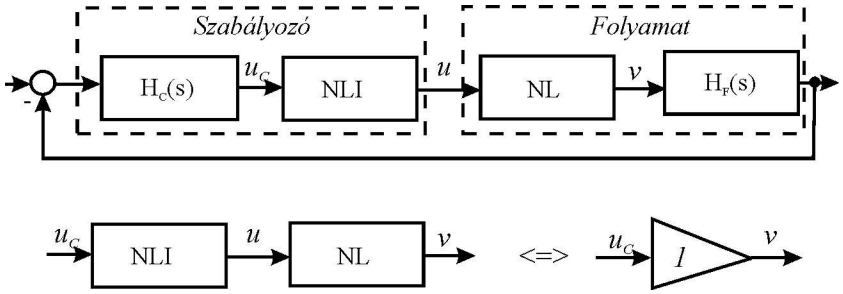
A k-ik mintavételben a beavatkozó jel számítása és az adaptációs lépés:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{\underline{\hat{\theta}}_{g_k}^T \cdot \underline{\varphi}_g(\underline{x}_k)} \left(-\underline{\hat{\theta}}_{f_k}^T \cdot \underline{\varphi}_f(\underline{x}_k) + \ddot{y}_{d_k} + \lambda \cdot \dot{e}_k + K \cdot S_k \right) \\ \hat{\theta}_{fi\,k+1} &= \hat{\theta}_{f\,k} - \gamma_{fi} \cdot \varphi_{fi}(\underline{x}_k) \cdot S_{\Delta k} \\ \hat{\theta}_{gi\,k+1} &= \hat{\theta}_{g\,k} - \gamma_{gi} \cdot \varphi_{gi}(\underline{x}_k) \cdot u_k \cdot S_{\Delta k} \end{aligned} \tag{10.98}$$

Az adaptációs törvények az irányítási algoritmust dinamikussá teszik. Minél pontosabbá válik a paraméterbecslés, a beavatkozó jel annál hatékonyabban kompenzálja a folyamat nemlinearitásainak hatását, az irányítás annál pontosabbá válik.

Holtsáv és kotyogás kompenzálása mechanikai irányítási rendszerekben

A mechanikai irányítására alkalmazott lineáris vagy folytonos nemlineáris irányítási algoritmusokkal megvalósított szabályozási rendszer tulajdonságait nagymértékben leronthatják a mechanikai rendszerben megjelenő nemfolytonos nemlinearitások, mint például a súrlódás és/vagy a kotyogás. Ezért a szabályozó által kiszámított beavatkozó jelet kompenzálni kell úgy, hogy kiegyenlítse (kompenzálja) a folyamatban megjelenő nemlinearitás hatását.
A holtsáv és kotyogás-szerű nemfolytonos nemlinearitások (*NL*) általában a folyamat bemenetén jelennek meg. A kiegyenlítésük úgy oldható meg, hogy a szabályozó kimenetén elhelyezzük a nemlinearitás inverzét (*NLI*). Az inverzét úgy határozzuk meg, hogy a nemlinearitással együtt egységnyi erősítésű átvitelként viselkedjen ($NLI \cdot NL = 1$). Feltételezzük, hogy a folyamat lineáris részét $H_F(s)$, a szabályozó lineáris részét pedig a $H_C(s)$ átviteli függvény írja le. Ha a nemlinearitás inverze kompenzálja a nemlinearitás hatását, akkor a rendszer lineáris szabályozó rendszerként fog viselkedni, a szabályozót lineáris irányítástechnikai módszerekkel tervezhetjük meg. (lásd 10.30 Ábra)

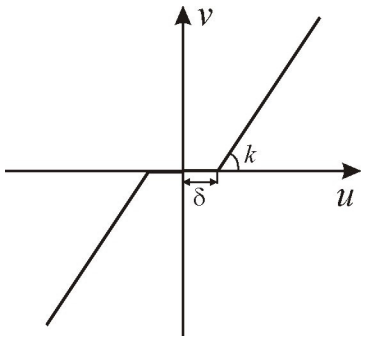


Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.11 Ábra: Módosított szabályozási rendszer nemfolytonos nemlinearitások kompenzálására**

Holtsáv és kompenzálása

A holtsáv nemlinearitás statikus átvitelét (u bemenet, v kimenet) a 10.31 Ábra mutatja. A kimenet addig nem változik, amíg a bemenet abszolút értéke nem éri el a holtsáv szélességét (δ). Ha u abszolút értéke nagyobb mint δ, a kimenet a bemenet függvényében k meredekséggel, lineárisan nő.

$$v = D(u) = \begin{cases} k(u-\delta), & u > \delta \\ 0, & |u| \le \delta \\ k(u+\delta), & u < -\delta \end{cases} \qquad (10.124)$$



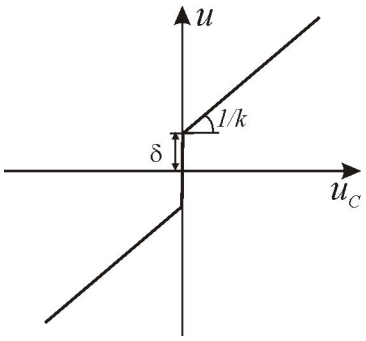
Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.12 Ábra: Holtsáv**

A holtsáv mechanikai rendszerekben általában a súrlódás miatt jelenik meg. Feltételezzük, hogy a súrlódást a Coulomb súrlódási modell írja le. A Coulomb súrlódás értéke (τ_C) konstans, csak a sebesség előjelétől függ. Ugyanakkor az álló mechanikai rendszer sebessége (ω) csak akkor válik nullánál nagyobbá, ha a rá ható - például egy motor által kifejtett – nyomaték (τ) nagyobb lesz, mint a Coulomb súrlódás értéke:

$$\tau_C = \begin{cases} F_C sign(\omega), & \tau \geq F_C \\ \tau, & \tau < F_C \end{cases} \tag{10.125}$$

$F_C>0$ Coulomb súrlódási együttható.
Feltételezzük, hogy az irányított rendszer bemenete a motorra adott felszültség (U), kimenete a mechanikai rendszer ω sebessége. Ha a motor rotorjának ellenállása R és nyomatékállandója k_τ, akkor elhanyagolva a motor elektromos időállandóját a motor által kifejtett nyomaték $\tau=(k_\tau/R)U$. Tehát a mechanikai rendszer sebessége nulla marad mindaddig, amíg a bemeneti felszültség el nem éri a $\delta=(R/k_\tau)F_C$ értéket. Azután a sebesség a bemeneti feszültséggel arányosan nő.
A holtsáv kompenzálásához a szabályozó kimeneti jelét a holtsáv inverzével módosítjuk (lásd 10.32 Ábra). A holtsáv inverzének statikus átvitele (u_C bemenet, u kimenet):

$$u = DI(u_C) = \begin{cases} \dfrac{u_C + k\delta}{k}, & u_C > 0 \\ 0, & u_C = 0 \\ \dfrac{u - k\delta}{k}, & u_C < 0 \end{cases} \tag{10.126}$$



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.13 Ábra: Holtsáv inverze**

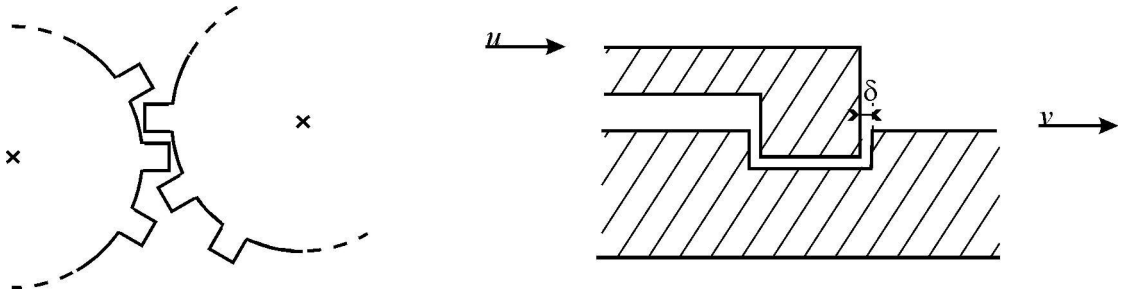
Ha a holtsáv nemlinearitás bemenete a holtsáv inverzének kimenete, akkor a holtsáv bemenete mindig δ–nál nagyobb lesz. Az u kimenetet, a pozitív tartományban, az alábbi módon számíthatjuk:

$$v = D(u) = D(DI(u_C)) = k\left(\frac{u_C + k\delta}{k}\right) - \delta = u_C \qquad (10.127)$$

A könnyen belátható, hogy $v=u_C$ negatív tartományban is érvényes.
Tehát ha a holtsáv bemenetét módosítjuk a holtsáv inverzével. A két átvitel sorosan csatolva ekvivalens az egységnyi erősítővel, a holtsáv inverze kompenzálja a holtsáv hatását.

Kotyogás és kompenzálása

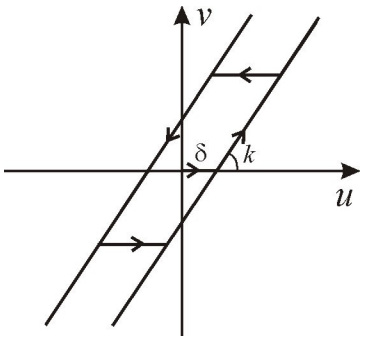
A kotyogás a mechanikai rendszerekben a nem tökéletes áttétel miatt jelenhet meg (például fogaskerék áttétel esetén a fogak közötti rés miatt – 10.33 Ábra).



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.14 Ábra: Kotyogás mechanikai áttételekben**

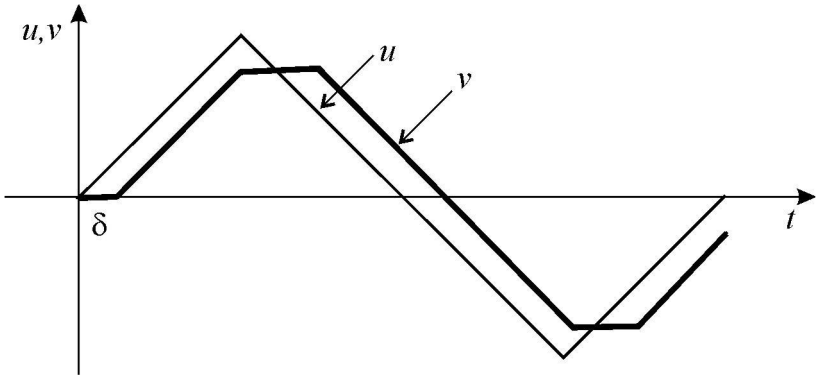
A holtsáv statikus átvitelét a (10.34 Ábra) a mechanikai áttétel mozgásának követésével érthetjük meg. Legyen a kotyogás bemenete (u) az áttétel előtti, a kimenete (v) az áttétel utáni pozíció. Az áttétel résének szélessége 2δ. Feltételezzük, hogy a rendszer indításakor

a be- és kimeneti pozíció nulla, a kimeneti pozíció a rés közepén van. Induláskor a bemenet meg kell, hogy tegyen δ elmozdulást ahhoz, hogy a kimenet értéke megváltozzon (a mechanikai áttétel bemenet oldala el kell, hogy érje az áttétel kimenet oldalát). Ezután a kimenet a bemenettel arányosan változik. Irányváltáskor a kimenet addig nem változik, amíg a bemenet meg nem tesz 2δ elmozdulást.



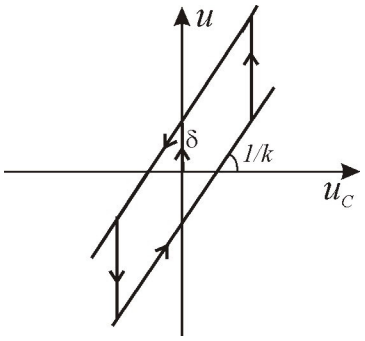
Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.15 Ábra: Kotyogás**

Ha a bemenet háromszög-jel, a kotyogás kimenetét a 10.35 Ábra mutatja. Látszik, hogy a kotyogás a mozgás késését okozza és irányváltáskor pontatlanul követi a bemeneti profilt.



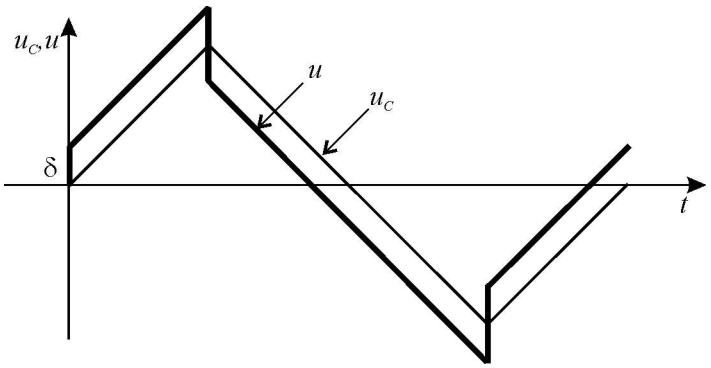
Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.16 Ábra: Kotyogás válasza háromszög-jel bemenetre**

Akárcsak a holtsáv kompenzálásánál, a kotyogás kompenzálásához a kotyogás inverzét (lásd 10.36 Ábra) kell sorosan csatolni a kotyogással, annak bemenetén. Ismert k és δ paraméterek esetén a kotyogás inverze tökéletesen kiegyenlíti a kotyogás hatását.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.17 Ábra: Kotyogás inverze**

Ha a kotyogás inverzének a bemenete háromszög-jel, a kimenetét a 10.37 Ábra mutatja.



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.18 Ábra: Kotyogás inverzének válasza háromszög-jel bemenetre**

A kotyogás inverzének válaszából látszik, hogy a kimenet 'siet' a bemenethez képest, ezzel kompenzálva a kotyogás okozta késleltetést. A kotyogás inverze sorosan csatolva a kotyogással egységnyi erősítésű lineáris átvitelt eredményez.