Jelfeldolgozás - 8. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

Z-transzformáció definíció

Konvergenciafeltételek

Feladatok

Konvergenciatartomány jellemzők

Mire jó a Z-transzformáció?

- Diszkrét idejű rendszerek elemzése
- Szűrők tervezése
- Rendszerek stabilitásának elemzése

A Z-transzformáció előnyei

- A DTFT nem minden diszkrét idejű jelre konvergens
- Ez a jelölés kényelmesebb, mint a Fourier transzformációs jelölés

Z-transzformáció

$x[n]$ diszkrét

$X(e^{j\omega}), X(z) folytonos$

- DTFT - Diszkrét idejű Fourier transzformáció

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{1}$$

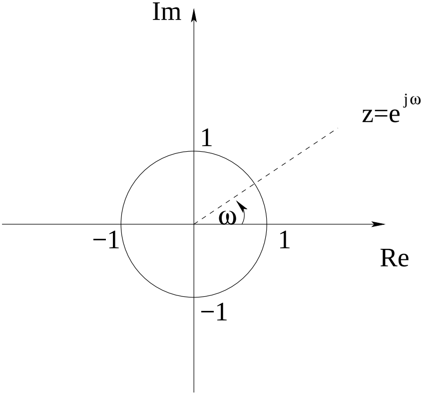
- ZT - Z -transzformáció

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{2}$$

ZT és DTFT

A DTFT a Z-transzformáció sajátos esete
$z \rightarrow e^{j\omega}$

Ez azt jelenti, hogy ha $|z| = 1$, akkor a Z-transzformáció a Fourier transzformációra redukálódik



j

Konvergenciafeltételek

Komplex szám polár alakja: $z = re^{j\omega}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$

$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$

DTFT és ZT konvergenciafeltételek

- DTFT

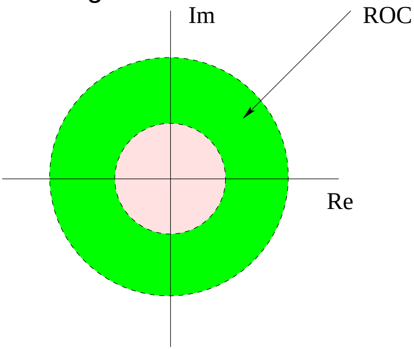
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{3}$$

- ZT

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty \tag{4}$$

Konvergenciatartomány

ROC - Region Of Convergence
Azon z komplex számok halmaza amelyre $X(z)$ konvergens.



Konvergenciatartomány

Ha a ROC tartalmazza az egységsugarú kört ($|z| = 1$), akkor az $x[n]$ DTFT-je is konvergens.

Példa: $x[n] = u[n]$

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{-j\omega n}| \to \infty$, tehát a DTFT nem konvergens

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{-n}| < \infty$, ha $|z| > 1$, tehát a ZT konvergens egy adott konvergenciatartományon

Racionális Z-transzformált

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{5}$$

ahol $P(z)$ és $Q(z)$ polinomok.

- Zérusok: $\{z|P(z) = 0\}$
- Pólusok: $\{z|Q(z) = 0\}$, estenként $z = 0$ és $z = \infty$

A pólusok helye és a konvergenciatartomány között szoros kapcsolat létezik.

1. Feladat - Jobboldali exponenciális jel

Legyen $x[n] = a^n u[n]$. Határozzuk meg a Z-transzformáltját!

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \tag{6}$$

A konvergencia feltétele:

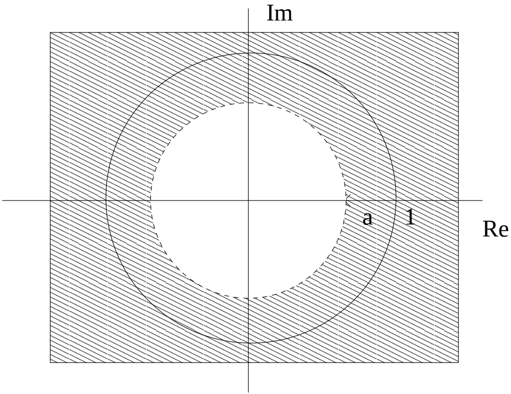
$$\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |az^{-1}| < 1 \tag{7}$$

$|az^{-1}| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > |a|$

Felhasználtuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, ha |q| < 1 \tag{8}$$

Konvergenciatartomány



2. Feladat - Baloldali exponenciális jel

Legyen $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Határozzuk meg a Z-transzformáltját!

$x[n] \neq 0$ ha $n \leq -1$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \tag{9}$$

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \tag{10}$$

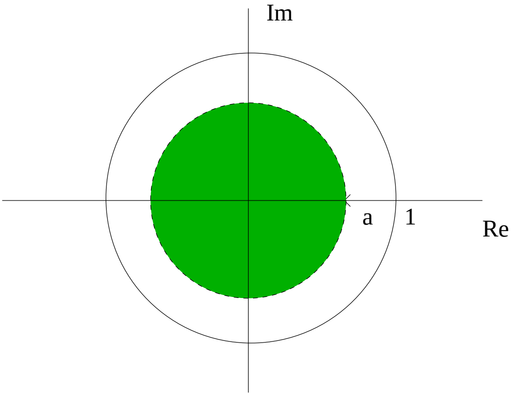
A konvergencia feltétele:

$$|a^{-1}z| < 1 \quad |z| < |a| \tag{11}$$

Ekkor:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \tag{12}$$

Konvergenciatartomány



Következtetések

- $x[n] = au[n] \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$
- $x[n] = -a^n u[-n-1] \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$
- A két jel Z-transzformáltja megegyezik, csak konvergenciatartományban különböznek.
- Kötelező feltüntetni a konvergenciatartományt!!!

3. Feladat - Két exponenciális jel összege

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n] \tag{13}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ((\frac{1}{2})^n u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]) z^{-n} \tag{14}$$

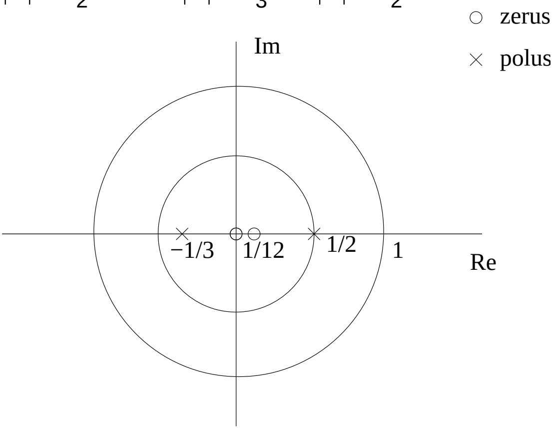
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3} z^{-1})^n \tag{15}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} \tag{16}$$

$$X(z) = \frac{2z(z - frac112)}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}, \quad |\frac{1}{2} z^{-1}| < 1 \; |-\frac{1}{3} z^{-1}| < 1 \tag{17}$$

Konvergenciatartomány

$$|z| > \frac{1}{2} \quad es \quad |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$



A Z-transzformált lineáris

Z-transzformáció operátor lineáris, ezért, ha $x[n]$ két tag összege $\Rightarrow$

- Meghatározzuk a tagok Z-transzformáltját, majd képezzük ezek összegét
- A konvergenciatartomány a tagok konvergencia tartományainak metszete lesz

Példa: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Véges jelek

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} \tag{18}$$

Legyen

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & maskeppen \end{cases} \tag{19}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} \tag{20}$$

Véges jelek

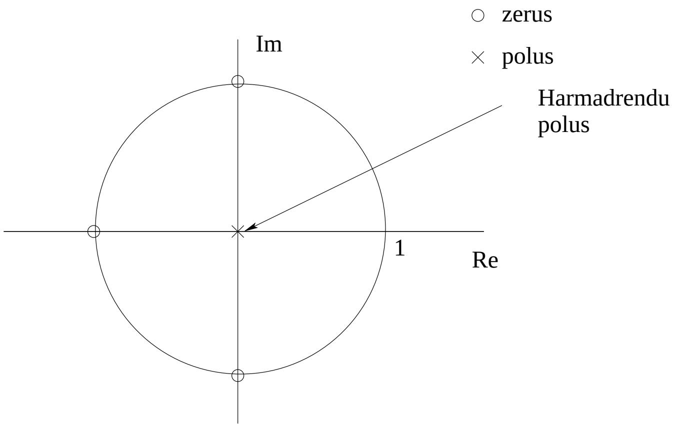
$$X(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \tag{21}$$

Konvergenciatartomány:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty \Rightarrow |a| < \infty, \; z \neq 0 \tag{22}$$

Határozzuk meg a pólusokat és a zérusokat $N = 4$ és $a = 1$ esetében

Zérusok és pólusok

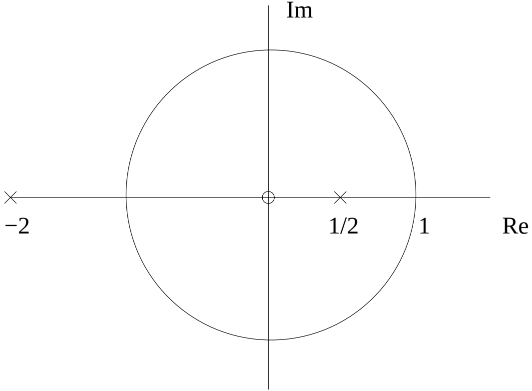


Konvergenciatartomány jellemzők

- A ROC mindig egy gyűrű a z-síkban
  $0 \leq r_1 < |z| < r_2 \leq \infty$
- A DTFT abszolút konvergens akkor és cakis akkor ha a ROC tartalmazza a $|z| = 1$ kört
- A ROC nem tartalmaz pólusokat (A pólusokban a z-transzformáció végtelen)
- Ha $x[n]$ egy véges jel, akkor a ROC az egész z-sík, esetenként a $z = 0$, illetve $z = \infty$ kivételével
- Ha $x[n]$ egy jobboldali jel, vagyis $x[n] = 0, \forall n < N_1$, akkor a ROC a legkülső pólustól végtelenig terjedhet
- Ha $x[n]$ egy baloldali jel, vagyis $x[n] = 0, \forall n > N_2$, akkor a ROC a legbelső pólustól $z = 0$-ig terjedhet terjedhet
- Ha $x[n]$ egy kétoldali jel, akkor a ROC egy gyűrűt alkot, amelynek belső és külső határai pólusok és nem tartalmaz pólusokat

Rendszerek stabilitása és a ROC

- Adott egy stabil rendszer $h[n]$ súlyfüggvénnyel (stabil: van DTFT-je)
- Legyen $h[n]$ Z-transzformáltja $H(z)$, melynek pólus-zéró diagramja:



- Rajzoljuk meg a konvergenciatartományt!