Jelfeldolgozás - 6. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

A Diszkrét Fourier sorok tulajdonságai

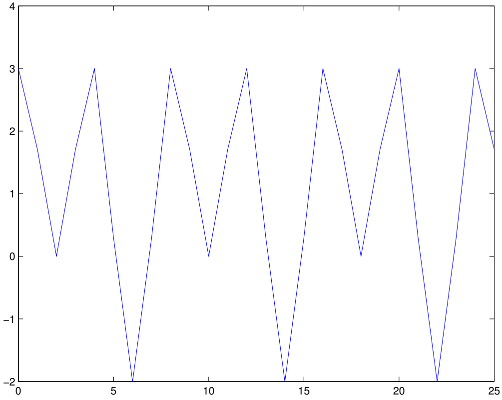
A Diszkrét idejű Fourier transzformáció tulajdonságai

Diszkrét Fourier sorok

$x[n]$ diszkrét jel periodikus ha létezik egy $N > 0$ ú.h.
$x[n] = x[n+N] \quad \forall n$

- Szintézis: $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$
- Analízis: $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$

$x[n] = 1 + sin(2\pi n/8) + 2cos(2\pi n/4)$



- Határozzuk meg a jel periódusát ($N =$? ú.h. $x[n+N] = x[n]$)
- Mennyi lesz a jel alapfrekvenciája?
- Határozzuk meg a Fourier sorbafejtés együtthatóit

$x[n] = 1 + sin(2\pi n/8) + 2cos(2\pi n/4)$

- N =8
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$
- $X[0], X[1], \ldots, X[N-1]$

k	x[k]	Re(X[k])	Im(X[k])
0	3.0	1	0
1	1.7	0	-0.5
2	0.0	1	0
3	1.7	0	0
4	3.0	0	0
5	0.3	0	0
6	-2.0	1	0
7	0.3	0	0.5

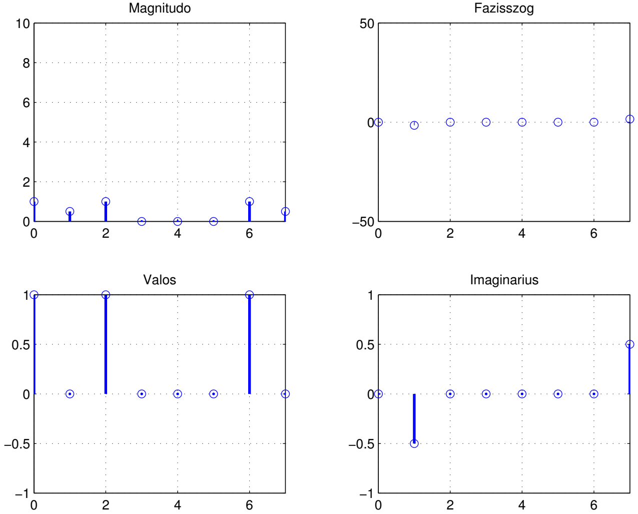
$$x[n] = 1 + sin(2\pi n/8) + 2cos(2\pi n/4)$$

$X[0] = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n] =$
$\frac{1}{8}(3 + 1.7 + 0 + 1.7 + 3.0 + 0.3 - 2.0 + 0.3) = 1$

$X[1] = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-jn\frac{2\pi}{8}} =$
$\frac{1}{8}(x[0] + x[1](cos\frac{\pi}{4} - jsin\frac{\pi}{4}) + x[2](cos\frac{\pi}{2} - jsin\frac{\pi}{2}) +$
$x[3](cos\frac{3\pi}{4} - jsin\frac{3\pi}{4}) + x[4](cos\pi - jsin\pi) + x[5](cos\frac{5\pi}{4} -$
$jsin\frac{5\pi}{4}) + x[6](cos\frac{3\pi}{2} - jsin\frac{3\pi}{2}) + x[7](cos\frac{7\pi}{4} - jsin\frac{7\pi}{4}) =$
$\frac{1}{8}(x[0] - x[4] + \frac{\sqrt{2}}{2}(x[1] - x[3] - x[5] + x[7]) - \frac{j}{8}(x[2] -$
$x[6] + \frac{\sqrt{2}}{2}(x[1] + x[3] - x[5] - x[7]) = \frac{-j}{2} = 0 - 0.5j$

Magnitúdó, Fázis, Valós, Imaginárius

$$x[n] = 1 + sin(2\pi n/8) + 2cos(2\pi n/4) \quad (1)$$



Egységimpulzus diszkrét Fourier sorbafejtése

Legyenek $x[n] = \delta[n]$ és $y[n] = \delta[n-1]$ periódikus diszkrét jelek. Legyen a periódus N és $n = 0, 1, \ldots N-1$. Mindkét jelre:

- Számítsuk ki a diszkrét Fourier sorbafejtés együtthatóit.
- Ábrázoljuk a magnitúdót és a fázist

Egységimpulzus $\delta[n],\ n = 0, 1, \ldots N - 1$

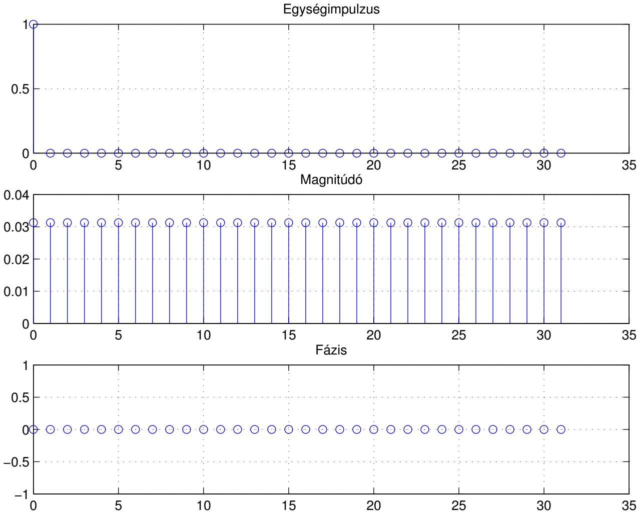
Legyen $N = 32$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} = \frac{1}{N}e^{0} = \frac{1}{N}$$

$$|X[k]| = \frac{1}{N} = \frac{1}{32}$$

$$Phase(X[k]) = arctg0 = 0$$

Jel, DFS-Magnitúdó, DFS-Fázis



Eltolt egységimpulzus $\delta[n-1],\ n=0,1,\dots N-1$

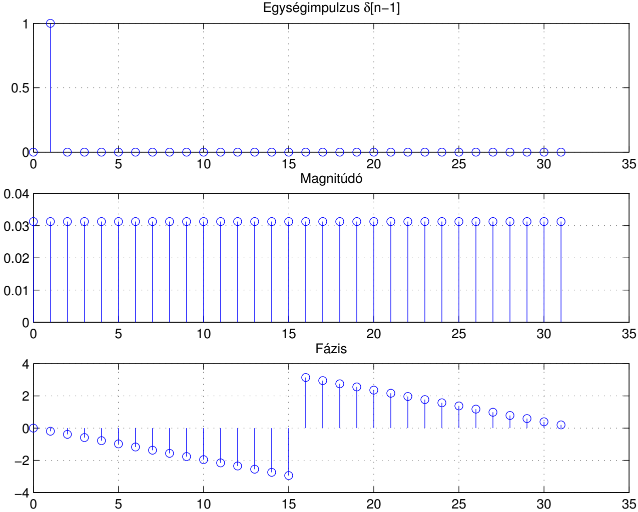
Legyen $N = 32$

$$Y[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} = \frac{1}{N}e^{-j2\pi\frac{1k}{N}}$$

$$|Y[k]| = |\frac{1}{N}(cos\frac{2\pi k}{N} - jsin\frac{2\pi k}{N})| = \frac{1}{32}$$

$$tg\phi_k = \frac{-sin\frac{2\pi k}{N}}{cos\frac{2\pi k}{N}} = -tg\frac{2\pi k}{N}$$

Jel, DFS-Magnitúdó, DFS-Fázis



Parseval tétele

A jel összenergiája idő és frekvencia tartományokban:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \qquad (2)$$

Példa: $x[n] = \delta[n]$

$\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{N}$

$\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = N \cdot (\frac{1}{N})^2$

Diszkrét Fourier sorok tulajdonságai

- Linearitás
- Időeltolás
- Differenciálás
- Integrálás
- Konvolúció

Linearitás

$$x[n] \rightarrow X[k]$$

$$y[n] \rightarrow Y[k]$$

$$ax[n] + by[n] \rightarrow aX[k] + bY[k]$$

Időeltolás

Ha $x[n] \rightarrow X[k]$

Akkor $x[n-n_0] \rightarrow X[k]e^{\frac{-j2\pi kn_0}{N}}$

Biz: Az időeltolás a fázist változtatja, a magnitúdót nem.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]e^{-j2\pi\frac{k(n-n_0+n_0)}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]e^{-j2\pi\frac{k(n-n_0)}{N}} \cdot e^{-j2\pi\frac{kn_0}{N}}$$

$$= X[k]e^{-j2\pi\frac{kn_0}{N}}$$

Differenciálás

Ha $x[n] \longrightarrow X[k]$

Akkor $x[n] - x[n-1] \longrightarrow X[k](1 - e^{\frac{-j2\pi k}{N}})$

Integrálás

Ha $x[n] \rightarrow X[k]$ és $X[0] = 0$ (nincs egyenáramú összetevő)

Akkor $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow X[k] \frac{1}{1-e^{-j2\pi k/N}}$

$$
\begin{aligned}
&x[n] \rightarrow X[k] \\
&x[n-1] \rightarrow X[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \\
&x[n-2] \rightarrow X[k] e^{-2j2\pi \frac{k}{N}} \\
&x[n-3] \rightarrow X[k] e^{-3j2\pi \frac{k}{N}} \\
&\ldots \\
&\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow X[k] \frac{1}{1-e^{-j2\pi k/N}}
\end{aligned}
$$

Konvolúció

Ha $x[n] \rightarrow X[k]$ és $y[n] \rightarrow Y[k]$ (azonos periódus)

Akkor $\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m] \rightarrow N \cdot X[k]Y[k]$

Konvolúció időben $\rightarrow$ Szorzás frekvenciában

$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m])e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$

$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m](\sum_{n=0}^{N-1}(y[n-m]e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}))$

$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]NY[k] \cdot e^{-j2\pi\frac{kM}{N}} = NX[k]Y[k]$

A diszkrét Fourier sorbafejtés együtthatóinak értelmezése

Legyen $x[n]$ egy diszkrét jel ú.h.

- $x[n] = x[n+N]$
- F_s mintavételezési frekvencia

Analízis frekvenciafelbontása: $\frac{F_s}{N}$

$X[k] \rightarrow \frac{kF_s}{N}$

Véges diszkrét jelek spektrális elemzése

Legyen $x[n], n = 0, 1, \ldots N - 1$ egy véges diszkrét jel.

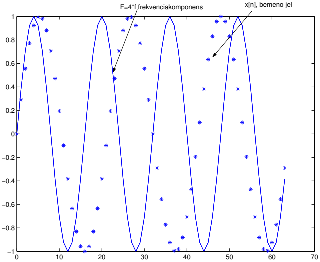
Ha úgy tekintjük a jelet, mint egy végtelen jel, amelynek N a periódusa, akkor alkalmazhatjuk a diszkrét Fourier sorbafejtést.

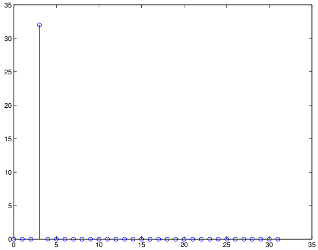
Ekkor a jelet $\frac{kF_s}{N}$ frekvenciájú komponensekre bontjuk.

Mi történik, ha a jel egy olyan frekvenciájú komponest tartalmaz, amely a nem esik egybe az analízisben szereplő frekvenciákkal (két frekvencia között van)?

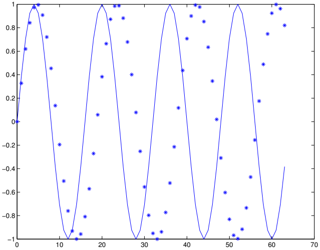
Példa

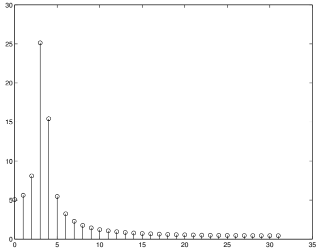
N=64, x[n] 3 periódus





N=64, x[n] 3,4 periódus





Diszkrét idejű Fourier transzformáció

- DTFT: Diszkrét idejű Fourier Transzformáció

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{3}$$

- IDTFT: Inverz Diszkrét idejű Fourier Transzformáció

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{4}$$

A Diszkrét idejű Fourier transzformáció tulajdonságai

Ha $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$ és $y[n] \rightarrow Y(e^{j\omega})$

Akkor

- Periodikus $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$
- Linearitás $ax[n] + by[n] \rightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- Időeltolás $x[n - n_0] \rightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$
- Frekvenciaeltolás $x[n]e^{j\omega_0 n} \rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- Konvolúció $x[n] * y[n] \rightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
- Tükrözés $x[-n] \rightarrow X(e^{-j\omega})$

A Diszkrét idejű Fourier transzformáció tulajdonságai

Ha $x[n] \rightarrow X(e^{j\omega})$ és $y[n] \rightarrow Y(e^{j\omega})$

Akkor

- Szimmetria valós jelekre 1. $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$
  - $Re[X(e^{-j\omega})] = Re[X(e^{j\omega})]$ páros szimmetria
  - $Im[X(e^{-j\omega})] = -Im[X(e^{j\omega})]$ páratlan szimmetria
  - $|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ páros szimmetria
  - $Phase(X(e^{-j\omega})) = -Phase(X(e^{j\omega}))$ páratlan szimmetria
- Szimmetria valós jelekre 2.
  - $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$
  - $x_e[n]$ páros jel, $x_o[n]$ páratlan jel
  - $x_e[n] \rightarrow Re[X(e^{j\omega})]$
  - $x_o[n] \rightarrow jIm[X(e^{j\omega})]$