Véges automaták, átalakítások, ekvivalenciák

Véges automaták értelmezése

Nemdeterminisztikus véges automatának nevezzük az $\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$ rendezett ötöst, ahol

- Q egy véges, nem üres halmaz, az **állapotok** halmaza,
- Σ a **bemeneti ábécé,**
- E az **átmenetek** (vagy *élek*) halmaza, ahol $E \subseteq Q \times \Sigma \times Q$,
- $I \subseteq Q$ a **kezdőállapotok** halmaza,
- $F \subseteq Q$ a **végállapotok** halmaza.

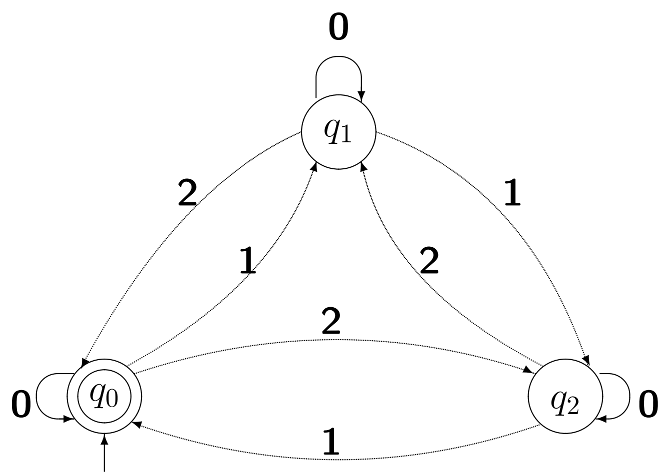
nemdeterminisztikus véges automata — **irányított, címkézett gráf**, amelynek csúcsai az állapotok, és egy p csúcsából akkor vezet egy a betűvel megcímkézett él a q csúcsba, ha $(p, a, q) \in E$.

kezdő- és végállapotok

átmenetgráf

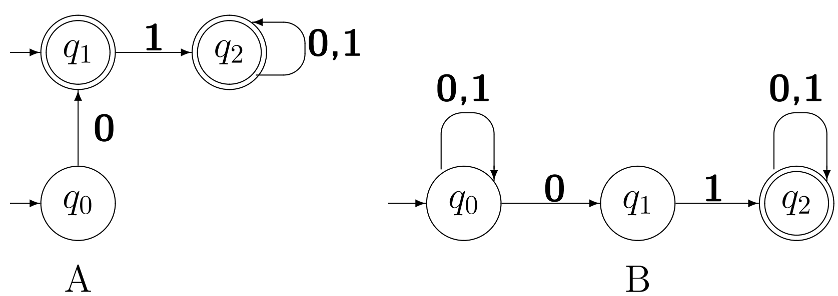
1. példa. $\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$,

$$E = \big\{(q_0, 0, q_0), (q_0, 1, q_1), (q_0, 2, q_2),\\ (q_1, 0, q_1), (q_1, 1, q_2), (q_1, 2, q_0),\\ (q_2, 0, q_2), (q_2, 1, q_0), (q_2, 2, q_1)\big\}, \quad I = \{q_0\}, \quad F = \{q_0\}.$$



2. példa.

$I = \{q_0, q_1\}, F = \{q_1, q_2\}$ $\qquad$ $I = \{q_0\}, F = \{q_2\}$



Egy (p, a, q) élnek p a kezdőpontja, q a végpontja, a pedig a címkéje.

séta

$$(q_0, a_1, q_1), (q_1, a_2, q_2), \ldots, (q_{n-2}, a_{n-1}, q_{n-1}), (q_{n-1}, a_n, q_n)$$

élsorozat a nemdeterminisztikus véges automata egy sétája, amelynek címkéje az $a_1a_2 \ldots a_n$ szó.

Ha $n = 0$, akkor $q_0 = q_n$ és $a_1a_2 \ldots a_n = \varepsilon$ $\quad\Longrightarrow$ *üres séta*.

a séta jelölése

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \;\cdots\; \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n,$$

vagy ha $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, akkor röviden: $q_0 \xrightarrow{w} q_n$.

q_0 a séta kezdőpontja, q_n pedig a végpontja

Egy séta produktív, ha kezdőpontja kezdőállapot, végpontja pedig végállapot.

Azt mondjuk, hogy a nemdeterminisztikus véges automata felismer egy szót, ha az a szó egy produktív séta címkéje.

Az ε üres szót a nemdeterminisztikus véges automata akkor ismeri fel, ha van produktív üres séta, amely egyenértékű azzal, hogy van olyan kezdőállapot, amely egyben végállapot is.

Egy nemdeterminisztikus véges automata által felismert szavak halmazát a nemdeterminisztikus véges automata által felismert nyelvnek mondjuk.

Az A nemdeterminisztikus véges automata által felismert nyelv

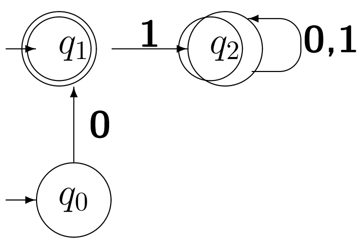
$$L(\mathrm{A}) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \exists p \in I,\ \exists q \in F,\ \exists p \xrightarrow{w} q \right\}.$$

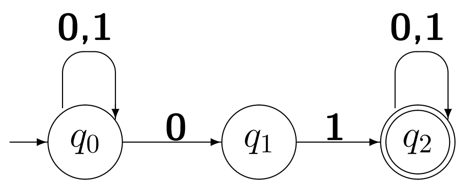
Az A_1 és A_2 véges automaták *ekvivalensek,* ha $L(\mathrm{A}_1) = L(\mathrm{A}_2)$.

Értelmezzük a következő átmenetfüggvényt:

$$\delta : Q \times \Sigma \to P(Q), \quad \delta(p,a) = \{q \in Q \mid (p,a,q) \in E\}$$

– egy p állapotnak és egy a betűnek megfelelteti azt az állapothalmazt, amelynek állapotaiba átmehet a véges automata, ha a p állapotban van és az olvasófej az a betűre mutat.





-

δ	0	1
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

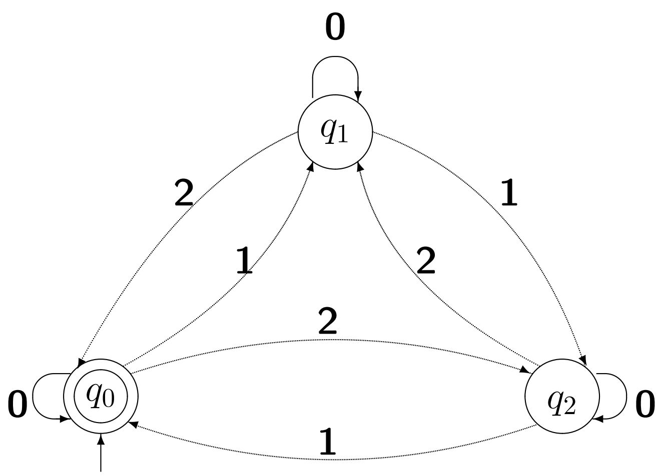
Jelöljük $|H|$-val a H halmaz elemeinek a számát.

Egy nemdeterminisztikus véges automata *determinisztikus,* ha

$$|I| = 1 \text{ és } |\delta(q,a)| \leq 1, \ \forall q \in Q, \ \forall a \in \Sigma.$$

A $|\delta(q,a)| \leq 1$ feltételt helyettesíthetjük a következővel:

$$(p,a,q) \in E, \ (p,a,r) \in E \implies q = r, \forall p,q,r \in Q, \forall a \in \Sigma.$$



δ	0	1	2
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$

Ha a determinisztikus véges automata olyan, hogy $|\delta(q,a)| = 1$ minden $q \in Q$ állapotra és minden $a \in \Sigma$ betűre, akkor azt mondjuk, hogy teljes, determinisztikus véges automata.

Minden determinisztikus véges automata teljessé tehető egy új csapdaállapot bevezetésével.

$$\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, \{q_0\}, F)$$

A vele ekvivalens teljes, determinisztikus véges automata pedig

$$\mathrm{A}' = (Q \cup \{s\}, \Sigma, E', \{q_0\}, F),$$
$$E' = E \cup \big\{(p,a,s) \mid \delta(p,a) = \emptyset, p \in Q, a \in \Sigma\big\} \cup \big\{(s,a,s) \mid a \in \Sigma\big\}.$$

Mivel ez az új állapot nem produktív, könnyű belátni, hogy $L(\mathrm{A}) = L(\mathrm{A}')$.

A következőkben, amennyiben csak véges automatát írunk, ezalatt mindig nemdeterminisztikus véges automatát értünk. Ha az automata determinisztikus, akkor ezt mindig hangsúlyozzuk.

Elérhetetlen állapotok kizárása

$\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$

Egy állapotot elérhetőnek nevezünk, ha létezik séta valamely kezdőállapotból ebbe az állapotba.

ELÉRHETŐ-ÁLLAPOTOK(A)

$U_0 \leftarrow I$
$i \leftarrow 0$
repeat
    $i \leftarrow i + 1$
    $U_i \leftarrow U_{i-1}$
    for minden $q \in U_{i-1}$
        do for minden $a \in \Sigma$
            do $U_i \leftarrow U_i \cup \delta(q, a)$
until $U_i = U_{i-1}$
$U \leftarrow U_i$
return U

A $Q \setminus U$ halmaz elemei nem elérhető állapotok, ezért kizárhatók a véges automatából anélkül, hogy az általa felismert nyelvet megváltoztatnánk.

Ha $|Q| = n$ és $|\Sigma| = m$, akkor a fenti algoritmus lépésszáma legrosszabb esetben $O(n^2 m)$, mivel a két egymásba ágyazott ciklus lépésszáma legfeljebb nm, a repeat ciklusé pedig n.

$L(\mathrm{A}) \neq \emptyset \iff U \cap F \neq \emptyset$

A fenti algoritmus kiegészíthető az $U \cap F \neq \emptyset$ feltétellel, hogy eldöntse, hogy a felismert $L(\mathrm{A})$ nyelv üres-e vagy sem.

Nemproduktív állapotok kizárása

$\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$

Egy állapotot produktív, ha létezik séta ebből az állapotból egy végállapotba.

$\delta^{-1} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q), \quad \delta^{-1}(p, a) = \{q \mid (q, a, p) \in E\}$

Ez a függvény egy p állapotra és egy a betűre megadja azt az állapothalmazt, amelynek elemeiből az a betű hatására el lehet jutni a p állapotba.

PRODUKTÍV-ÁLLAPOTOK(A)

$V_0 \leftarrow F$
$i \leftarrow 0$
repeat
  $i \leftarrow i + 1$
  $V_i \leftarrow V_{i-1}$
  for minden $p \in V_{i-1}$
    do for minden $a \in \Sigma$
      do $V_i \leftarrow V_i \cup \delta^{-1}(p, a)$
until $V_i = V_{i-1}$
$V \leftarrow V_i$
return V

A $Q \setminus V$ halmaz elemei nem produktív állapotok, ezért kizárhatók a véges automatából, anélkül, hogy az általa felismert nyelvet befolyásolnánk.

Ha n az állapotok száma és m a betűk száma, akkor a lépésszám ebben az esetben is $O(n^2m)$, akárcsak az Elérhető-állapotok algoritmus esetében.

$L(\mathrm{A}) \neq \emptyset \iff V \cap I \neq \emptyset$

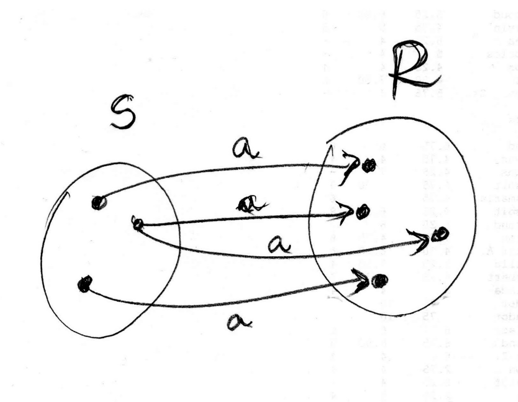
Nemdeterminisztikus véges automata átalakítása determinisztikus véges automatává

Tétel. ***Tetszőleges nemdeterminisztikus véges automatához mindig megkonstruálható egy vele ekvivalens determinisztikus véges automata.***

$\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$ **nemdeterminisztikus véges automata**

Legyen $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{Q}, \Sigma, \overline{E}, \overline{I}, \overline{F})$ **determinisztikus véges automata, ahol**

$$\overline{Q} = \mathcal{P}(Q) \setminus \emptyset,$$
$$\overline{E} = \Big\{(S, a, R) \mid R, S \in \overline{Q}, a \in \Sigma, R = \bigcup_{p \in S} \delta(p, a)\Big\},$$
$$\overline{I} = \{I\},$$
$$\overline{F} = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}.$$



Be kell bizonyítanunk, hogy $L(\mathrm{A}) = L(\overline{\mathrm{A}})$**.**

a) **Bebizonyítjuk, hogy** $L(\mathrm{A}) \subseteq L(\overline{\mathrm{A}})$**. Legyen** $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in L(\mathrm{A})$**. Ekkor létezik a**

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{a_k} q_k, \quad q_0 \in I, \ q_k \in F$$

séta. Képezzük a következő halmazokat, felhasználva az $\overline{\mathrm{A}}$ **véges automata** $\overline{\delta}$ **átmenetfüggvényét:**

$S_0 = \{q_0\}$, $\overline{\delta}(S_0, a_1) = S_1$, ... $\overline{\delta}(S_{k-1}, a_k) = S_k$.

Ekkor $q_1 \in S_1, \ldots, q_k \in S_k$, és mivel $q_k \in F$, következik, hogy $S_k \cap F \neq \emptyset$, tehát $S_k \in \overline{F}$. Így létezik az

$$S_0 \xrightarrow{a_1} S_1 \xrightarrow{a_2} S_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} S_{k-1} \xrightarrow{a_k} S_k, \ \ S_0 \subseteq I, \ S_k \in \overline{F}$$

séta. Vannak olyan $S'_0, \ldots, S'_k$ halmazok, amelyekre $S'_0 = I$, továbbá minden $i = 0, 1, \ldots, k$-ra $S_i \subseteq S'_i$ és

$$S'_0 \xrightarrow{a_1} S'_1 \xrightarrow{a_2} S'_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} S'_{k-1} \xrightarrow{a_k} S'_k$$

is produktív séta. Ezért $w \in L(\overline{\mathrm{A}})$. Tehát $L(\mathrm{A}) \subseteq L(\overline{\mathrm{A}})$.

b) Bebizonyítjuk, hogy $L(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq L(\mathrm{A})$. Legyen $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in L(\overline{\mathrm{A}})$. Ekkor létezik a

$$\overline{q_0} \xrightarrow{a_1} \overline{q_1} \xrightarrow{a_2} \overline{q_2} \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} \overline{q}_{k-1} \xrightarrow{a_k} \overline{q}_k, \ \ \overline{q}_0 \in \overline{I}, \ \overline{q}_k \in \overline{F}$$

séta. Az $\overline{F}$ definíciója alapján $\overline{q}_k \cap F \neq \emptyset$, azaz létezik $q_k \in \overline{q}_k \cap F$, tehát $q_k \in F$ és $\overline{q}_k$ definíciója alapján létezik q_{k-1} úgy, hogy $(q_{k-1}, a_k, q_k) \in E$. Hasonlóképpen, léteznek a $q_{k-2}, \ldots, q_1, q_0$ állapotok úgy, hogy $(q_{k-2}, a_k, q_{k-1}) \in E, \ldots, (q_0, a_1, q_1) \in E,$ ahol $q_0 \in \overline{q}_0 = I$, ezért létezik a

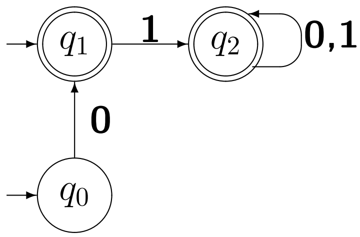
$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{a_k} q_k, \ \ q_0 \in I, \ q_k \in F$$

séta, tehát $L(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq L(\mathrm{A})$.

A determinisztikus véges automata megkonstruálásában segítségünkre lehet ennek $\overline{\delta}$ átmenetfüggvénye, amely a δ segítségével a következőképpen értelmezhető

$$\overline{\delta}(\overline{q}, a) = \bigcup_{q \in \overline{q}} \delta(q, a), \ \forall \overline{q} \in \overline{Q}, \forall a \in \Sigma.$$

Példa: nemdeteminisztikus automata $\longrightarrow$ determinisztikus automata



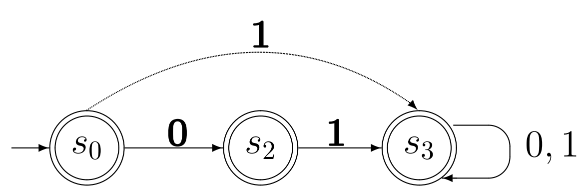
δ	**0**	**1**
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

δ'	**0**	**1**
$s_0 = \{q_0, q_1\}$	$\{s_2\}$	$\{s_3\}$
$s_1 = \{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$s_2 = \{q_1\}$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
$s_3 = \{q_2\}$	$\{s_3\}$	$\{s_3\}$
$s_4 = \{q_0, q_2\}$	$\{s_5\}$	$\{s_3\}$
$s_5 = \{q_1, q_2\}$	$\{s_3\}$	$\{s_5\}$
$s_6 = \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{s_5\}$	$\{s_3\}$

Elérhetetlen állapotok kizárása

$$U_0 = \{s_0\}$$
$$U_1 = \{s_0, s_2, s_3\}$$
$$U_2 = \{s_0, s_2, s_3\} = U$$ **elérhető állapotok**

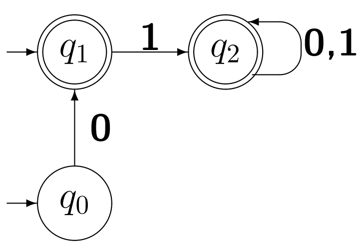
δ'	**0**	**1**
s_0	$\{s_2\}$	$\{s_3\}$
s_2	$\emptyset$	$\{s_3\}$
s_3	$\{s_3\}$	$\{s_3\}$



Egyszerűbb megoldás

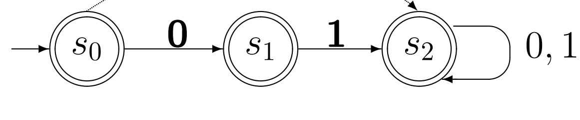
Az $\overline{\mathrm{A}}$ véges automata állapotait fokozatosan kapjuk meg úgy, hogy elindulunk a $\overline{q}_0 = I$ állapottal, meghatározzuk a $\overline{\delta}(\overline{q}_0, a)$ állapotokat, minden $a \in \Sigma$ elemre. Az újonnan kapott állapotokra szintén meghatározzuk az átmenetek alapján a belőlük elérhető állapotokat. Ezt addig folytatjuk, amíg már nem kapunk új állapotokat.

Elindulunk az új kezdőállapotból, és csak az újonnan megjelenő állapotokat vesszük figyelembe, ezzel automatikusan kizárjuk a nemelérhető állapotokat.



δ	**0**	**1**
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

δ'	**0**	**1**
$s_0 = \{q_0, q_1\}$	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$
$s_1 = \{q_1\}$	$\emptyset$	$\{s_2\}$
$s_2 = \{q_2\}$	$\{s_2\}$	$\{s_2\}$



A következő algoritmus egy $\mathrm{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$ nemdeterminisztikus véges automatához megkonstruálja a vele ekvivalens $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{Q}, \Sigma, \overline{E}, \overline{I}, \overline{F})$ determinisztikus véges automata M átmenettáblázatát, de nem tartalmazza annak megállapítását, hogy egy állapot végállapot-e vagy sem. Ez utóbbi azonban könnyűszerrel beépíthető. Az algoritmusban használjuk a Bennevan függvényt, amelyet nem írtunk le, de megjegyezzük, hogy a Bennevan$(\overline{q}, \overline{Q})$ értéke igaz, ha a $\overline{q}$ állapot már szerepel a $\overline{Q}$ halmazban, és hamis ellenkező esetben. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a Σ betűinek egy felsorolása.

Nemdet-det(A)

$\overline{q}_0 \leftarrow I$
$\overline{Q} \leftarrow \{\overline{q}_0\}$
$i \leftarrow 0$ ▷ i a sorokat számolja.
$k \leftarrow 0$ ▷ k az állapotokat számolja.
repeat
  for $j = 1, 2, \ldots, m$ ▷ j az oszlopokat számolja.
    do $\overline{q} \leftarrow \bigcup_{p \in \overline{q}_i} \delta(p, a_j)$
      if $\overline{q} \neq \emptyset$
        then if Bennevan$(\overline{q}, \overline{Q})$
          then $M[i, j] \leftarrow \{\overline{q}\}$
          else $k \leftarrow k + 1$
            $\overline{q}_k \leftarrow \overline{q}$
            $M[i, j] \leftarrow \{\overline{q}_k\}$
            $\overline{Q} \leftarrow \overline{Q} \cup \{\overline{q}_k\}$
        else $M[i, j] \leftarrow \emptyset$
  $i \leftarrow i + 1$
until $i = k + 1$
return az $\overline{\mathrm{A}}$ automata M átmenettáblázata

Determinisztikus véges automaták ekvivalenciája

teljes, determinisztikus véges automatákkal dolgozunk

$\delta(q,a)$ **halmaz mindig egyetlen elemet tartalmaz**

Ha $A=\{a\}$**, akkor** $elem(A)=a$**.**

Adottak $A=(Q,\Sigma,E,\{q_0\},F)$ **és** $A'=(Q',\Sigma,E',\{q_0'\},F')$**.**

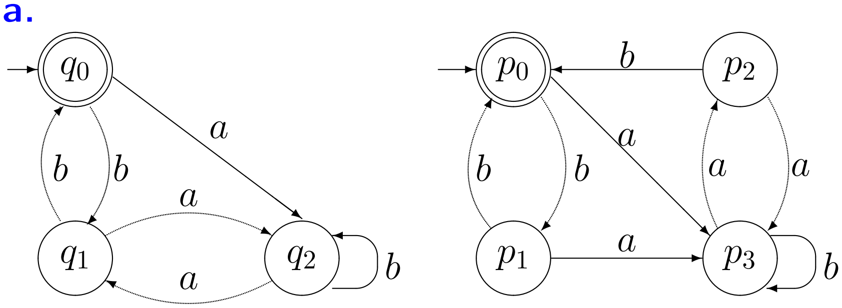
táblázat, amely (q,q') **alakú állapotpárokat tartalmaz, ahol** $q\in Q$ **és** $q'\in Q'$

	$\ldots \quad a \quad \ldots$
$\ldots$	$\ldots$
(q,q')	$\Big(elem\big(\delta(q,a)\big), elem\big(\delta'(q',a)\big)\Big)$
$\ldots$	$\ldots$

ha megjelenik egy olyan pár, amelyre egyik állapot végállapot, a másik meg nem, akkor az algoritmust befejezzük: a két detemi- nisztikus véges automata nem ekvivalens

Ha két tetszőleges nemdeterminisztikus véges automatáról szeretnénk eldönteni, hogy ekvivalensek-e, akkor előbb mindkettőt átalakítjuk determinisztikus véges automatává, majd alkalmazzuk a fentebb leírt algoritmust annak megállapítására, hogy ekvivalensek-e.

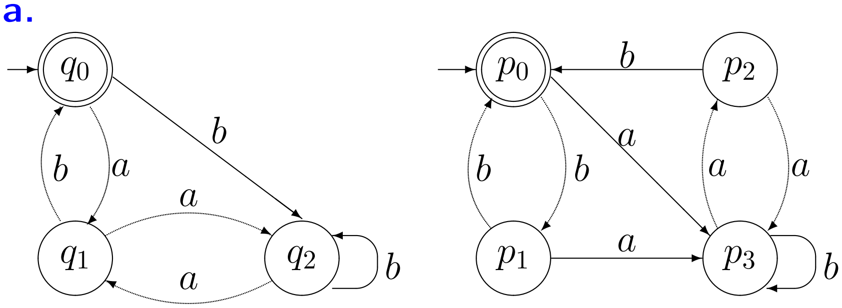
1. példa.



	a	b
(q_0, p_0)	(q_2, p_3)	(q_1, p_1)
(q_2, p_3)	(q_1, p_2)	(q_2, p_3)
(q_1, p_1)	(q_2, p_3)	(q_0, p_0)
(q_1, p_2)	(q_2, p_3)	(q_0, p_0)

A két véges automata ekvivalens, mivel minden lehetséges állapotpárt figyelembe vettünk, és minden pár mindkét eleme végállapot vagy egyik sem az.

2. példa.



	a	b
(q_0, p_0)	(q_1, p_3)	(q_2, p_1)
(q_1, p_3)	(q_2, p_2)	(q_0, p_3)
(q_2, p_1)		
(q_2, p_2)		

A két véges automata nem ekvivalens, mivel a második sor utolsó oszlopában a (q_0, p_3) állapotpár első eleme végállapot, a második pedig nem az.

Automata-ekvivalencia$(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$

írjuk be a táblázat első sorának első oszlopába a (q_0, q_0') állapotpárt
$i \leftarrow 0$
repeat
    $i \leftarrow i + 1$
    legyen (q, q') a táblázat i-edik sorának első oszlopában levő állapotpár
    for minden $a \in \Sigma$ betűre
        do írjuk be a táblázat i-edik sora a jelzésű oszlopába a $\Big(elem\big(\delta(q,a)\big), elem\big(\delta'(q',a)\big)\Big)$ állapotpárt
            if $\Big(elem\big(\delta(q,a)\big), elem\big(\delta'(q',a)\big)\Big)$ egyik állapota végállapot, a másik pedig nem
              then return nem
              else írjuk be a $\Big(elem\big(\delta(q,a)\big), elem\big(\delta'(q',a)\big)\Big)$ párt az els? oszlop következ? üres sorába, ha még nem szerepel az első oszlopban
until $(i+1)$-edik sor első eleme üres
return igen

Ha $|Q| = n$, $|Q'| = n'$ és $|\Sigma| = m$, akkor figyelembe véve, hogy a **repeat** ciklust legrosszabb esetben nn'-szer kell végrehajtani, a **for** ciklust pedig m-szer, kiszámíthatjuk, hogy a maximális lépésszám legrosszabb esetben $O(nn'm)$, vagy ha $n = n'$, akkor $O(n^2m)$.

Feladat

Rendeljünk az alábbi nemdeterminisztikus véges automatához egy vele ekvivalens determinisztikus véges automatát!