http://www.ms.sapientia.ro/~kasa/formalis.htm

Chomsky-féle hierarchia

$G = (N, T, P, S)$ nyelvtan:

• 0-s típusú (általános vagy mondatszerkezetű), ha semmilyen megkötést nem teszünk a helyettesítési szabályaira.

• 1-es típusú (környezetfüggő), ha minden szabálya $\alpha A\gamma \to \alpha\beta\gamma$ alakú, ahol $A \in N$, $\alpha, \gamma \in (N \cup T)^*$, $\beta \in (N \cup T)^+$. Ezenkívül megengedhető az $S \to \varepsilon$ szabály is, ha S nem szerepel egyetlen szabály jobb oldalán sem.

• 2-es típusú (környezetfüggetlen), ha minden szabálya $A \to \beta$ alakú, ahol $A \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$. Ezenkívül megengedhető az $S \to \varepsilon$ szabály is, ha S nem szerepel egyetlen szabály jobb oldalán sem.

• 3-as típusú (reguláris), ha szabályai $A \to aB$ vagy $A \to a$ alakúak, ahol $a \in T$ és $A, B \in N$. Ezenkívül megengedhető az $S \to \varepsilon$ szabály is, ha S nem szerepel egyetlen szabály jobb oldalán sem.

$$\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_3.$$

Minden véges nyelv reguláris.

Ha $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ eleme a nyelvnek, akkor bevezetjük a következő szabályokat: $S \to a_1 A_1$, $A_1 \to a_2 A_2$, ... $A_{n-2} \to a_{n-1} A_{n-1}$, $A_{n-1} \to a_n$, ahol S a nyelvtan kezdőszimbóluma, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ pedig különböző nemterminálisok.

Ha az üres szó is eleme a nyelvnek, akkor azt az $S \to \varepsilon$ szabállyal generáljuk.

Az üres halmaz szintén reguláris nyelv, hisz például a $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$ reguláris nyelvtan az üres halmazt generálja.

Átnevezések kiküszöbölése

átnevezés: $A \to B$ alakú szabály, ahol $A, B \in N$

$G = (N, T, P, S)$ átnevezéseket tartalmazó nyelvtan
$G' = (N, T, P', S)$ átnevezéseket nem tartalmazó nyelvtan (ugyanolyan típusú)

Átnevezés-kizárás(G)

1 valahányszor $A \to B$ és $B \to C$ átnevezések P-ben vannak, mindannyiszor vegyük fel P-be az $A \to C$ átnevezést is mindaddig, amíg P bővíthető,
2 valahányszor $A \to B$ átnevezés és a $B \to \alpha$ ($\alpha \notin N$) szabály P-ben van, mindannyiszor vegyük fel P-be az $A \to \alpha$ szabályt is,
3 legyen P' azon P-beli szabályok halmaza, amelyek nem átnevezések.
4 **return** G'

G és G' ekvivalensek

Ha G $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ típusú, akkor G' is i típusú lesz.

Példa:

$G = \Big(\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S\Big)$,
ahol a P **elemei:**

$$
\begin{array}{lllll}
S \to A, & A \to B, & B \to C, & C \to B, & D \to C, \\
S \to B, & A \to D, & & C \to Aa, & \\
 & A \to aB, & & & \\
 & A \to b. & & &
\end{array}
$$

Első lépés. **A következő új átnevezések kerülnek be a szabályok közé:**

$S \to D$ **(**$S \to A$ **és** $A \to D$ **miatt),**
$S \to C$ **(**$S \to B$ **és** $B \to C$ **miatt),**
$A \to C$ **(**$A \to B$ **és** $B \to C$ **miatt),**
$B \to B$ **(**$B \to C$ **és** $C \to B$ **miatt),**
$C \to C$ **(**$C \to B$ **és** $B \to C$ **miatt),**
$D \to B$ **(**$D \to C$ **és** $C \to B$ **miatt).**

Második lépés. **A következő új szabályok jelennek meg:**

$S \to aB$ **(**$S \to A$ **és** $A \to aB$ **miatt),**
$S \to b$ **(**$S \to A$ **és** $A \to b$ **miatt),**
$S \to Aa$ **(**$S \to C$ **és** $C \to Aa$ **miatt),**
$A \to Aa$ **(**$A \to C$ **és** $C \to Aa$ **miatt),**
$B \to Aa$ **(**$B \to C$ **és** $C \to Aa$ **miatt).**

Az új $G' = \Big(\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P', S\Big)$ **nyelvtan szabályai:**

$$
\begin{array}{llll}
S \to b, & A \to b, & B \to Aa, & C \to Aa, \\
S \to aB, & A \to aB, & & \\
S \to Aa & A \to Aa. & &
\end{array}
$$

Normálalakú nyelvtanok

normálalakú nyelvtan: **ha szabályainak bal oldalán terminális betűk nem szerepelnek**

Σ_1 és Σ_2 ábécékre *homomorfizmusnak* nevezzük a $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ függvényt, ha $h(u_1u_2) = h(u_1)h(u_2),\ \forall u_1, u_2 \in \Sigma_1^*$. Könnyű belátni, hogy tetszőleges $u = a_1a_2 \dots a_n \in \Sigma_1^*$ esetében a $h(u)$ értéket egyértelműen meghatározza h-nak a Σ_1-re való megszorítása, ugyanis $h(u) = h(a_1)h(a_2) \dots h(a_n)$.

Ha a h függvény még bijektív is, akkor *izomorfizmusról* beszélünk.

Tétel. ***Tetszőleges nyelvtanhoz megkonstruálhatunk egy vele ekvivalens, azonos típusú nyelvtant, amely normálalakú.***

$G = (N, T, P, S)$ **eredeti nyelvtan**
$G' = (N', T, P', S)$ **normálalakú nyelvtan**

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ azok a terminális szimbólumok, amelyek szerepelnek a szabályok bal oldalán. Ekkor vezessük be az $A_1, A_2, \dots, A_k$ új nemterminálisokat. Használjuk a következő jelöléseket: $T_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $T_2 = T \setminus T_1$, $N_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ és $N' = N \cup N_1$.

Használjuk a $h : N \cup T \longrightarrow N' \cup T_2$ izomorfizmust, ahol:

$$h(a_i) = A_i, \quad \text{ha } a_i \in T_1,$$
$$h(X) = X, \quad \text{ha } X \in N \cup T_2$$

Értelmezzük a P' szabályhalmazt:

$$P' = \Big\{ h(\alpha) \to h(\beta) \;\Big|\; (\alpha \to \beta) \in P \Big\} \cup \Big\{ A_i \longrightarrow a_i \;\Big|\; i = 1, 2, \dots, k \Big\}$$

Ekkor $\alpha \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \beta$ akkor és csakis akkor, ha $h(\alpha) \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} h(\beta)$.

Innen következik a tételünk, hisz
$S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u \;\Leftrightarrow\; S = h(S) \overset{*}{\underset{G'}{\Longrightarrow}} h(u) = u.$

Példa.
Adott a $G = (\{S, D, E\}, \{a, b, c, d, e\}, P, S)$**, ahol** P **szabályai:**

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aebc \mid aDbc \\ Db & \to & bD \\ Dc & \to & Ebccd \\ bE & \to & Eb \\ aE & \to & aaD \mid aae \end{array}$$

P' **szabályai a következők:**

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AeBC \mid ADBC \\ DB & \to & BD \\ DC & \to & EBCCd \\ BE & \to & EB \\ AE & \to & AAD \mid AAe \\ A & \to & a \\ B & \to & b \\ C & \to & c \end{array}$$

Milyen szavakat generál ez a nyelvtan? $S \Longrightarrow AeBC \stackrel{*}{\Longrightarrow} aebc$ **miatt** $aebc \in L(G')$. $S \Longrightarrow ADBC \Longrightarrow ABDC \Longrightarrow ABEBCCd \Longrightarrow AEBBCCd \Longrightarrow AAeBBCCd \stackrel{*}{\Longrightarrow} aaebbccd$**, tehát** $aaebbccd \in L(G')$.

Feltételezzük, hogy $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} A^{n-1}EB^nC(Cd)^{n-1}, \ n \geq 2$. **Ezt matematikai indukcióval bizonyíthatjuk. Már láttuk, hogy feltevésünk igaz ha** $n = 2$.

$S \stackrel{*}{\Longrightarrow} A^{n-1}EB^nC(Cd)^{n-1} \Longrightarrow A^{n-2}AADB^nC(Cd)^{n-1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} A^nB^nDC(Cd)^{n-1} \Longrightarrow A^nB^nEBCCd(Cd)^{n-1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} A^nEB^{n+1}CCd(Cd)^{n-1} = A^nEB^{n+1}C(Cd)^n$**, amit éppen bizonyítani kellett.**

De $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} A^{n-1}EB^nC(Cd)^{n-1} \Longrightarrow A^{n-2}AAeB^nC(Cd)^{n-1} \stackrel{*}{\Longrightarrow} a^neb^nc(cd)^{n-1}$. **Tehát** $a^neb^nc(cd)^{n-1} \in L(G'), \ n \geq 1$. **Ezeket a szavakat** G**-ben is hasonlóan le lehet vezetni.**

Kiterjesztett nyelvtanok

1-es típusú kiterjesztett nyelvtan. Minden szabály $\alpha \to \beta$ alakú, ahol $|\alpha| \le |\beta|$, kivéve esetleg az $S \to \varepsilon$ szabályt.

2-es típusú kiterjesztett nyelvtan. Minden szabály $A \to \beta$ alakú, ahol $A \in N, \beta \in (N \cup T)^*$.

3-as típusú kiterjesztett nyelvtan. Minden szabály $A \to uB$ vagy $A \to u$ alakú, ahol $A, B \in N, u \in T^*$.

Tétel. *Tetszőleges kiterjesztett nyelvtanhoz megadható egy vele ekvivalens, ugyanolyan típusú nyelvtan.*

Jelöljük G_{ki}-vel a kiterjesztett nyelvtant és G-vel azt a nyelvtant, amelyet minden típusra külön értelmezünk, és amelyről meg fogjuk mutatni, hogy ekvivalens G_{ki}-vel.

1-es típus. Legyen $X_1X_2\ldots X_m \to Y_1Y_2\ldots Y_n$ $(m \le n)$ a G_{ki} nyelvtan egy szabálya, amely nem megfelelő alakú. Vegyük fel G szabályhalmazába a következő szabályokat, ahol $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$ új változók:

$$\begin{array}{lcl}
X_1X_2\ldots X_m & \to & A_1X_2X_3\ldots X_m \\
A_1X_2\ldots X_m & \to & A_1A_2X_3\ldots X_m \\
 & \ldots & \\
A_1A_2\ldots A_{m-1}X_m & \to & A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m \\
A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m & \to & Y_1A_2\ldots A_{m-1}A_m \\
Y_1A_2\ldots A_{m-1}A_m & \to & Y_1Y_2\ldots A_{m-1}A_m \\
 & \ldots & \\
Y_1Y_2\ldots Y_{m-2}A_{m-1}A_m & \to & Y_1Y_2\ldots Y_{m-2}Y_{m-1}A_m \\
Y_1Y_2\ldots Y_{m-1}A_m & \to & Y_1Y_2\ldots Y_{m-1}Y_mY_{m+1}\ldots Y_n.
\end{array}$$

Továbbá, G_{ki} minden megengedett, vagyis $\gamma_1\delta\gamma_2 \to \gamma_1\gamma\gamma_2$ alakú szabályát vegyük át változtatás nélkül G szabályhalmazába.

Ezek után a $L(G_{ki}) \subseteq L(G)$ tartalmazás abból következik, hogy a G_{ki} minden szabályának az alkalmazását egy, a belőle képzett G-beli szabályok alkalmazásával tudjuk szimulálni. Továbbá, mivel a G szabályai csak a felírt sorrendben alkalmazhatók, nem kapunk újabb szavakat, ezért $L(G) \subseteq L(G_{ki})$ is teljesül.

Példa. $G_{ki} = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ és P a következő szabályokból áll:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
S & \to & aSBC \mid aBC & CB & \to & BC \\
aB & \to & ab & bB & \to & bb \\
bC & \to & bc & cC & \to & cc.
\end{array}
$$

$CB \to BC$ nem jó. Ekkor, ha $A_1 = A$, $A_2 = D$:

$$
\begin{array}{lcl}
CB & \to & AB \\
AB & \to & AD \\
AD & \to & BD \\
BD & \to & BC
\end{array}
$$

Így az új nyelvtan $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P', S)$, ahol P' elemei:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
S & \to & aSBC \mid aBC & & & \\
CB & \to & AB & aB & \to & ab \\
AB & \to & AD & bB & \to & bb \\
AD & \to & BD & bC & \to & bc \\
BD & \to & BC & cC & \to & cc.
\end{array}
$$

már környezetfüggő.
Igazolni lehet, hogy $L(G_{ki}) = L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2-es típus. Legyen $G_{ki} = (N, T, P, S)$.

Ki kell küszöbölnünk az $A \to \varepsilon$ alakú szabályokat úgy, hogy csak $S \to \varepsilon$ maradhat, ha S nem szerepel szabály jobb oldalán.

Ehhez felépítjük a következő halmazokat:

$U_0 = \{A \in N \mid (A \to \varepsilon) \in P\}$
$U_i = U_{i-1} \cup \{A \in N \mid (A \to w) \in P,\ w \in U_{i-1}^{+}\}$.

Mivel minden $i \geq 1$ esetében $U_{i-1} \subseteq U_i$ és $U_i \subseteq N$, és N véges, $\exists k : U_{k-1} = U_k$, és legyen ez U.

A nemterminális akkor és csakis akkor eleme U-nak, ha $A \stackrel{*}{\Longrightarrow} \varepsilon$.
($\varepsilon \in L(G_{ki})$, akkor és csakis akkor ha $S \in U$.)

G szabályait a következőképpen kapjuk G_{ki} szabályaiból:
G_{ki} minden olyan $A \to \alpha$ szabálya esetében melyre $\alpha \neq \varepsilon$, vegyük fel a G szabályai közé ezt a szabályt és mellette azokat is, amelyeket úgy képezünk, hogy α-ból elhagyunk egy vagy több U-beli változót, de csak akkor, ha ezáltal a jobb oldal nem lesz ε.

Az így kapott G nyelvtan ugyanazt a nyelvet generálja, mint G_{ki}, kivéve az ε szót, amelyet nem tud generálni.

Ha $\varepsilon \notin L(G_{ki})$, akkor a bizonyítást befejeztük.
Ha $\varepsilon \in L(G_{ki})$, akkor két esetet különböztetünk meg:

1. Ha az S kezdőszimbólum nem szerepel egyetlen szabály jobb oldalán sem, akkor új szabály G-ben: $S \to \varepsilon$.

2. Ha viszont S szerepel valamelyik szabály jobb oldalán, akkor S' új kezdőszimbólum, és új szabályok G-ben: $S' \to S$ és $S' \to \varepsilon$.

Példa Legyen $G_{ki} = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ 2-típusú kiterjesztett nyelvtan, ahol P elemei:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid B \\ B &\rightarrow bB \mid C \\ C &\rightarrow Cc \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Ekkor $U_0 = \{C\}$, $U_1 = \{B, C\}$, $U_3 = \{S, B, C\} = U$. Az új nyelvtan szabályai:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSc \mid ac \mid B \\ B &\rightarrow bB \mid b \mid C \\ C &\rightarrow Cc \mid c. \end{aligned}$$

Mivel az eredeti nyelvtan generálja az üres szót is, és S szerepel szabály jobb oldalán, új kezdőszimbólumot kell bevezetnünk és még két szabályt: $S' \rightarrow S, S' \rightarrow \varepsilon$. Tehát az eredetivel ekvivalens környezetfüggetlen nyelvtan:

$G = (\{S', S, B, C\}, \{a, b, c\}, P', S')$, és a szabályok:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \mid \varepsilon \\ S &\rightarrow aSc \mid ac \mid B \\ B &\rightarrow bB \mid b \mid C \\ C &\rightarrow Cc \mid c. \end{aligned}$$

Mindkét nyelvtan az $\{a^m b^n c^p \mid p \geq m \geq 0, n \geq 0\}$ nyelvet generálja.

3-as típus.

– Alkalmazzuk G_{ki}-re a 2-es típus esetében használt eljárást az $A \to \varepsilon$ alakú szabályok kiküszöbölésére.

– Majd kiküszöböljük az átnevezéseket az Átnevezés-kizárás algoritmus segítségével.

– Majd minden $A \to a_1 a_2 \ldots a_n B$ szabályra, ahol $B \in N \cup \{\varepsilon\}$, vegyük fel G szabályai közé a következőket:

$A \to a_1 A_1, \qquad A_1 \to a_2 A_2, \qquad A_{n-1} \to a_n B,$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ új változók.

Könnyen igazolható, hogy az így megkonstruált G nyelvtan ekvivalens G_{ki}-vel.

Példa. $G_{ki} = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ a vizsgálandó 3-as típusú kiterjesztett nyelvtan, ahol P:

$$\begin{array}{lll} S & \to & abA \\ A & \to & bB \\ B & \to & S \mid \varepsilon. \end{array}$$

Először küszöböljük ki a $B \to \varepsilon$ szabályt. Mivel $U_0 = U = \{B\}$, a szabályok a következők lesznek:

$$\begin{array}{lll} S & \to & abA \\ A & \to & bB \mid b \\ B & \to & S. \end{array}$$

Ez utóbbi szabályt (amely átnevezés) ki lehet küszöbölni, bevezetve helyette a $B \to abA$ szabályt.

Hátra van még az $S \to abA$ és $B \to abA$ szabályok jobb oldalának a feldarabolása. Mivel mindkét szabály jobb oldala ugyanaz, elég egy új változót bevezetnünk, és az $S \to abA$ helyett az $S \to aC$ és $C \to bA$ szabályokat használni. A $B \to abA$ helyett ekkor elég a $B \to aC$ szabályt venni.

Az új nyelvtan: $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P', S)$, **ahol** P':

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aC \\ A & \rightarrow & bB \mid b \\ B & \rightarrow & aC \\ C & \rightarrow & bA. \end{array}$$

Be lehet bizonyítani, hogy $L(G_{ki}) = L(G) = \{(abb)^n \mid n \geq 1\}$**.**

A Chomsky-féle nyelvosztályok zártsági tulajdonságai

reguláris műveletek: **egyesítés, szorzat, iteráció**

Tétel. ***Az*** $\mathcal{L}_i$ ***(***$i = 0, 1, 2, 3$***) nyelvek osztálya zárt a reguláris műveletekre nézve.***

Kiterjesztett nyelvtanok segítségével végezzük a bizonyítást. Legyenek $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ **és** $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ i**-típusú kiterjesztett nyelvtanok.**
Feltételezzük, hogy $N_1 \cap N_2 = \emptyset$**.**

Egyesítés. Legyen $G_\cup = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S)$**.**

Könnyű igazolni, hogy $L(G_\cup) = L(G_1) \cup L(G_2)$**. Ha** $i = 0, 2, 3$**, akkor abból, hogy** G_1 **és** G_2 i**-típusú, következik, hogy** $G_\cup$ **is az lesz. Ha** $i = 1$**, akkor, ha valamelyik nyelvtan generálja az üres szót, akkor a** $G_\cup$ **szabályaiból kivesszük a megfelelő (esetleg mindkettő)** $S_k \rightarrow \varepsilon$ **(**$k = 1, 2$**) szabályt és helyettesítjük** $S \rightarrow \varepsilon$ **szabállyal.**

Szorzat. Legyen $G_\times = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1S_2\}, S)$**. Igazolható, hogy** $L(G_\times) = L(G_1)L(G_2)$**. Az** $i = 0, 2$ **típusoknál** $G_\times$ **is ugyanolyan típusú lesz. Az** $i = 1$ **típusnál, ha van** P_1**-ben** $S_1 \rightarrow \varepsilon$ **szabály, de** P_2**-ben nincs** $S_2 \rightarrow \varepsilon$ **szabály, akkor a** $S_1 \rightarrow \varepsilon$ **szabályt**

helyettesítjük az $S \to S_2$ szabállyal. Ha van P_1-ben $S_1 \to \varepsilon$ szabály és P_2-ben $S_2 \to \varepsilon$ szabály, akkor ezeket helyettesítjük az $S \to \varepsilon$ szabállyal.

Másképp kell megadni a szabályokat a reguláris nyelvtanok ($i = 3$) esetében, mert $S \to S_1S_2$ nem reguláris szabály. Helyette a következő nyelvtant használjuk:

$G_\times = (N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, P_1' \cup P_2, S_1)$, ahol P_1' annyiban különbözik P_1-től, hogy az $A \to u, u \in T^*$ szabályok helyett $A \to uS_2$ kerül be P_1'-be .

Iteráció. Legyen $G_* = (N_1 \cup \{S\}, T_1, P, S)$.

2-típusú nyelvtanoknál legyen $P = P_1 \cup \{S \to S_1S,\ S \to \varepsilon\}$. Ekkor G_* is 2-típusú lesz.

A 3-típusnál, a szorzathoz hasonlóan átalakítjuk a szabályokat, azaz $P = P_1' \cup \{S \to S_1,\ S \to \varepsilon\}$, ahol P_1' abban különbözik P_1-től, hogy minden $A \to u$ $(u \in T^*)$ alakú szabály helyett $A \to uS$ alakút veszünk, a többit változatlanul hagyjuk. Ekkor G_* is 3-típusú lesz.

$i = 0, 1$-re nem jók a 2-típusnál megadott szabályok, mert az $S \to S_1S$ alkalmazása során megtörténhet, hogy a következő levezetésekhez jutunk: $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} S_1S_1\alpha$, $S_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_1\beta_1$, $S_1 \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_2\beta_2$, ahol $\beta_1\alpha_2$ egy helyettesítési szabály bal oldala. Ekkor az $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha$ levezetésben helyettesítve $\beta_1\alpha_2$-t a neki megfelelő szabály jobb oldalával, olyan szót is generálhatunk, amelyik nincsen benne az iterált nyelvben.

Hogy ezt elkerüljük, először feltételezzük, hogy a nyelvtan normálalakú, majd bevezetünk egy új S' nemterminálist, tehát a nemterminálisok halmaza most $N_1 \cup \{S, S'\}$, a szabályok pedig a következők lesznek: $P = P_1 \cup \{S \to \varepsilon,\ S \to S_1S'\} \cup \{aS' \to aS \mid a \in T_1\}$.

Most már az előbbi levezetéseket csak úgy lehet alkalmazni, hogy az $S \Longrightarrow S_1S'$ helyettesítéssel kezdjük, majd eljutunk az $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} \alpha_1\beta_1S'$ levezetéshez. Ezt csak akkor tudjuk S' helyettesítésével folytatni, ha β_1 utolsó betűje terminális, és miután alkalmaztuk valamelyik $aS' \to aS$ helyettesítési szabályt.

Igazolható, hogy mindegyik típus esetében $L(G_*) = L(G_1)^*$.