Turing-automaták mint átalakítók

Most a Turing-automatákat nem felismerőként, ha átalakítóként vizsgáljuk. Az érdekel bennünket, hogy amikor az automatának nincs átmenete, mit tartalmaz a szalag.

Legyen $T = (Q, V, W.\delta, q_0, B, \emptyset)$ egy Turing-automata. Értelmezzük a következő részleges függvényt:

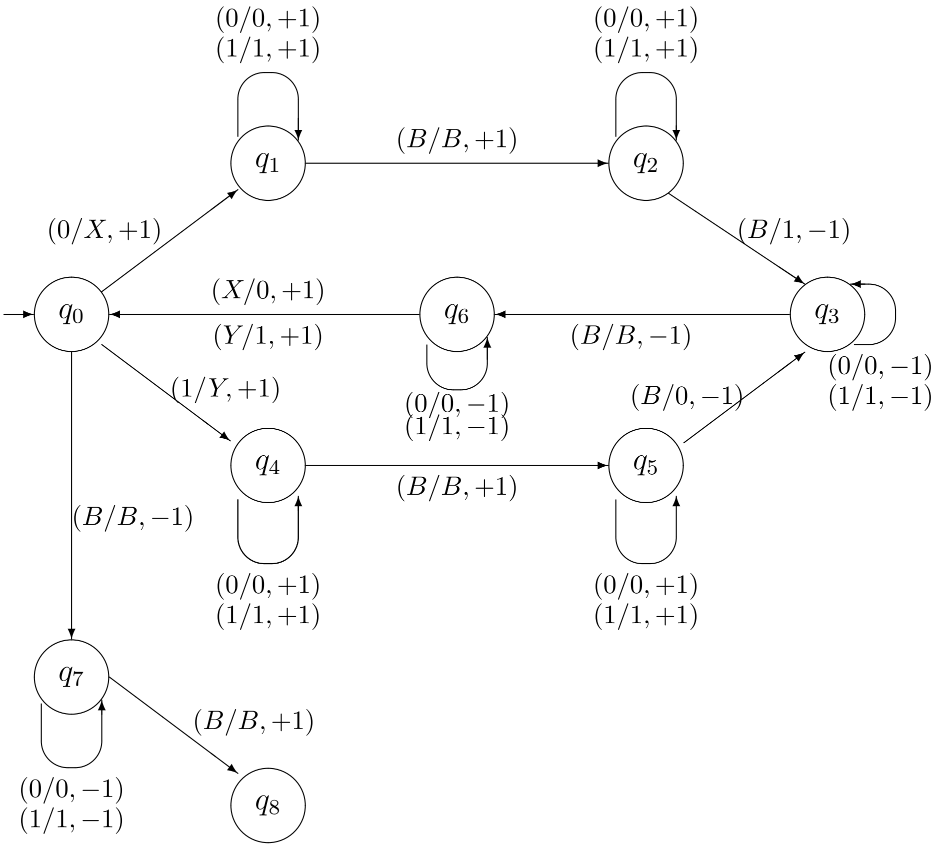
$$f_T \;:\; V^* \to W^*,\; f_T(u) = \begin{cases} v, \text{ ha létezik } (\varepsilon, q_0, u) \overset{*}{\underset{T}{\Longrightarrow}} (\varepsilon, q, v) \\ \qquad\qquad\qquad \text{teljes számítási folyamat} \\ \\ \text{különben nincs meghatározva} \end{cases}$$

Az így értelmezett f_T függvényt *Turing-előállítható függvénynek* (vagy Turing-értelemben előállítható függvénynek) nevezzük.

Turing-előállítható-e a következő függvény?

$$\begin{aligned} f(a_1 a_2 \dots a_n) &= a_1 a_2 \dots a_n B b_1 b_2 \dots b_n, \\ & \quad \text{ahol } a_i \in \{0,1\},\;\; b_i = 1 - a_i,\; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

A következő Turing-automata igazolja, hogy igen.



A $q_0, q_1, q_2, q_3, q_6, q_0$ vonalon minden 0-nak megfeleltetünk egy-egy 1-est, míg a $q_0, q_4, q_5, q_3, q_6, q_0$ vonalon minden 1-esnek egy-egy 0-t. A q_7, q_8 állapotokra csak azért van szükség, hogy az írófej a szó elejére kerüljön.

A következőkben az $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ típusú parciális függvények Turing-automatával való előállítását vizsgáljuk. Minden x természetes számot unárisan ábrázolunk, azaz az x ábrázolása $x+1$ darab 1-sel történik (ìgy a 0-nak 1 felel meg, az 1-nek 11, a 2-nek 111 és így tovább.) Ennek jele: $\overline{x}$. A függvény egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ argumentumát a szalagon a következőképpen jelöljük: $\overline{x}_1 B \overline{x}_2 B \ldots B \overline{x}_{n-1} B \overline{x}_n$.

Az $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ függvényt *Turing-kiszámíthatónak* (vagy *parciálisan rekurzív függvénynek*) nevezzük, ha minden olyan esetben, amikor értelmezve van az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, létezik egy olyan T Turing-automata, amelyre létezik egy

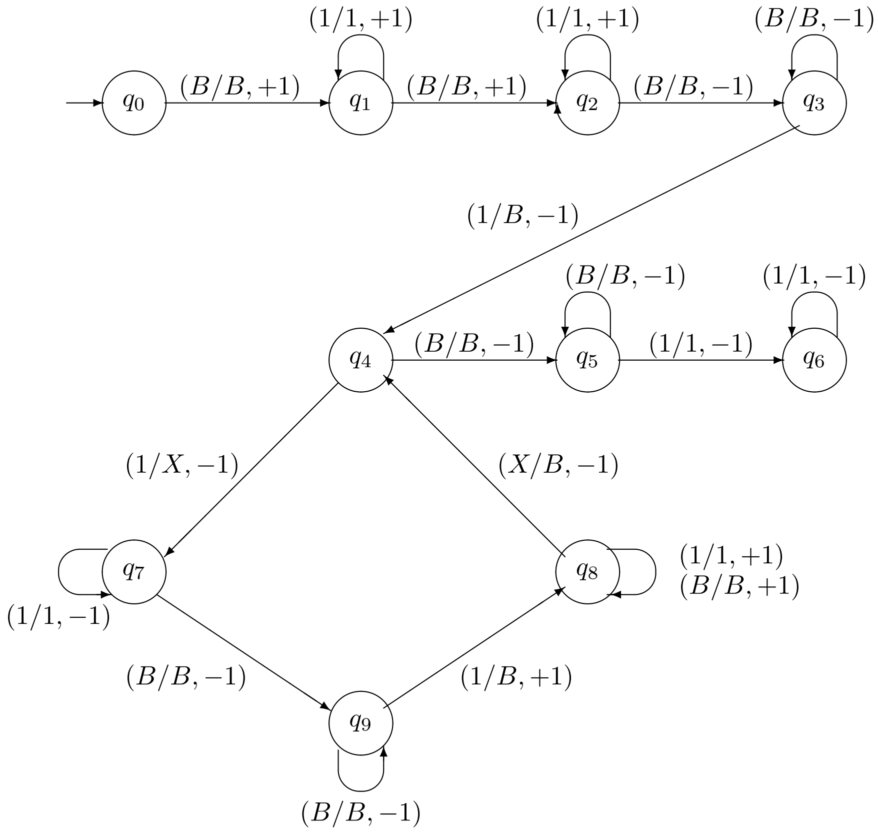
$$(\varepsilon, q_0, B\overline{x}_1 B \overline{x}_2 B \ldots B \overline{x}_{n-1} B \overline{x}_n) \underset{T}{\overset{*}{\Longrightarrow}} (\varphi, q, B\overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)})$$

teljes számítási folyamat.
(Itt φ tetszőleges szó W^*-ből, és akár ε-nak is vehető, mivel minden esetben néhány további lépéssel törölhető.)

Példa.

Az $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2, & \text{ha } x_1 \geq x_2, \\ \\ \text{különben meghatározatlan} \end{cases}$

A következő automata kiszámítja a fenti függvényt.



Egy függvényről azt mondjuk, hogy algoritmikusan kiszámítható, ha létezik olyan algoritmus, amelyik kiszámítja az értékét. Itt nyilván az algoritmus mint intuitív fogalom jelenik meg.

Church-tézis. *Az algoritmikusan kiszámítható függvények osztálya azonos a Turing-kiszámítható függvények osztályával.*

A Turing-kiszámíthatóság tehát azonosítható magával az algoritmus fogalmával. Léteznek más formális megközelítések, mint pl. a λ-kalkulus, a Post-rendszerek stb., amelyek mind ekvivalensek, olyan értelemben, hogy valamilyen módon a Turing-kiszámítható (vagyis parciálisan rekurzív) függvények osztályát jelentik. Hasonló a RAM-modell (RAM=Random Access Machine) is, amely tulajdonképpen egy absztrakt számítógép modellje.