INFORMATIKAI ALGORITMUSOK I.

Elektronikus tankönyv

ELTE Informatikai Kar, Budapest, 2005

Iványi Antal

alkotó szerkesztő

INFORMATIKAI

ALGORITMUSOK I.

ELTE Informatikai Kar, Budapest, 2005

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyvtámogatási program keretében készült.

Alkotó szerkesztő: Iványi Antal

Szerzők: Kása Zoltán (1.), Járai Antal és Kovács Attila (2.), Jörg Rothe (3. és 4.), Gyires Tibor (5.), Iványi Antal és Claudia Leopold (6.), Eberhard Zehendner (7.), Szidarovszky Ferenc (8.), Vizvári Béla (9.), Ulrich Tamm (10.), Balogh Ádám és Iványi Antal (11.), Demetrovics János és Sali Attila (12.), Miklós István (13.), Ingo Althöfer és Stefan Schwartz (14.), Szirmay-Kalos László (15.), Elek István és Sidló Csaba (16.), Galántai Aurél és Jeney András (17.)

Szakmai lektorok: Ivanyos Gábor (2.), Gonda János (3.), Rónyai Lajos (4.), Sima Dezső (6. és 7.), Mayer János (8.), Csirik János (9.), Fridli Sándor (10.), Varga László (11.), Kiss Attila (12.), Katsányi István (13.), Szántai Tamás (14.), Vida János (15.), Meskó Attila (16.), Szántai Tamás (17.)

Nyelvi lektor: Biró Gabriella

Fordítók: Láng Zsuzsa (3.), Sidló Csaba (4.), Roszik János és Sztrik János (5.), Szakács Laura (7.), Pintér Miklós (8.), Sike Sándor (10.), Belényesi Viktor és Nikovits Tibor (14.)

A könyv címoldalán – a Szépművészeti Múzeum engedélyével és az ELTE Informatikai Karának támogatásával – Vasarely Victor *Dirac* című festménye látható. A borítóhoz felhasznált filmet a GOMA RT. bocsátotta rendelkezésünkre. A borítót Iványi Antal tervezte.

ISBN: 963 ??? ??? ?
Kiadja az ELTE Informatikai Kara
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
Telefon: 381-2139, Fax: 381-2140

Honlap: http://www.inf.elte.hu/
Elektronikus cím: itcs@inf.elte.hu

Felelős kiadó: Kozma László

Előszó

Az informatikai algoritmusok magyar nyelvű szakirodalma az utóbbi huszonöt évben alakult ki. Az első szakkönyvet Lovász László és Gács Péter írta 1978-ban [13]. Ezt a könyvet fordítások követték: 1982-ben Aho, Hopcroft és Ullman [1] könyve, 1987-ben Knuth háromkötetes monográfiája [10, 11, 12], majd 1987-ben Cormen, Leiserson és Rivest műve [2]. 1999-ben újra hazai szerzők következtek – Rónyai Lajos, Ivanyos Gábor és Szabó Réka [17] – majd 2002-ben megjelent Lynch *Osztott algoritmusok* című monográfiája [15].

Ezt 2003 tavaszán Iványi Antal *Párhuzamos algoritmusok* című könyve [8], majd 2003 őszén – *Új algoritmusok* címmel – Cormen, Leiserson, Rivest és Stein tankönyvének [3] fordítása követte.

A magyar informatikus hallgatók és gyakorlati szakemberek nagy érdeklődéssel fogadták az *Új algoritmusokat* – néhány hónap alatt a kiadott 2000 példány fele gazdára talált. Ez ösztönözte ennek a könyvnek a hazai szerzőit, hogy – külföldi kollégáik segítségével – további informatikai területek algoritmusait is összefoglalják.

A könyv tartalmát hat részre tagoljuk: *Alapok, Hálózatok, Diszkrét optimalizálás, Folytonos optimalizálás, Adatbázisok* és *Alkalmazások.*

Az első kötetbe azok a fejezetek került, amelyek szeptemberig elkészültek. Minden fejezet bemutat egy alkalmazási vagy elméleti szempontból lényeges területet és azokhoz kapcsolódó algoritmusokat. Az algoritmusok többségét szóban és olyan pszeudokóddal is megadjuk, amely a programozási tapasztalattal rendelkező olvasók számára könnyen érthető.

Az első kötet 247 ábrát, 157 pszeudokódot és 133 példát tartalmaz, amelyek elősegítik a tárgyalt algoritmusok működésének megértését. Az önálló tanulást az alfejezetek végén lévő gyakorlatok (összesen 269), az egyes témákban való elmélyülést pedig a fejezetek végén lévő (összesen 66) feladatok segítik. A fejezetek anyagával kapcsolatos friss és kiegészítő ismeretekre való utalások találhatók a fejezetek végén lévő *Megjegyzések a fejezethez* című részben. Az *Irodalomjegyzékben* megadjuk egyrészt a felhasznált szakirodalom bibliográfiai adatait, másrészt – teljességre törekedve – felsoroljuk a magyar nyelvű forrásokat. Az irodalomjegyzék számos eleme felhasználható a megfelelő honlapra való ugráshoz. Külön részben szerepel a könyvben használt szakkifejezések angol-magyar és magyar-angol szótára, valamint a jelölések listája. A könyvet *Névmutató* és *Tárgymutató* zárja.

Az algoritmusok bemutatása az igényelt erőforrások – elsősorban futási idő és memória – elemzését is magában foglalja. A szakirodalomban szokásos módon felső korlátokat adunk meg a legrosszabb esetre jellemző erőforrásigényre, és esetenként a megoldandó probléma erőforrásigényére jellemző alsó korlátot is levezetünk.

A könyv kéziratát HLATEX kiadványszerkesztő eszköz segítségével készítettük, amelyet az elmúlt hat év során Belényesi Viktorral és Locher Kornéllal fejlesztettünk ki, és korábban már három könyv kéziratának előállítására használtunk. Az ábrák többségét Locher Kornél rajzolta. Az irodalomjegyzéket Iványi Anna tette élővé.

Garey és Johnson klasszikus művét [5] követve mindazon algoritmusok futási idejét exponenciálisnak nevezzük, amelyekre nem adható polinomiális felső korlát.

Az *Új algoritmusok* példáját követve tizedespontot használunk.

Mindig különös gondot fordítunk könyveink külsejére. Az adott esetben olyan megoldást kerestünk, amely

- tükrözi a könyv tartalmi gazdagságát (az első kötet 17 és a második kötet hasonló számú fejezetét)
- és az alkotók szoros kötődését mind Magyarországhoz, mind pedig Európához.

Úgy gondoljuk, hogy a pécsi születésű Vásárhelyi Viktor – aki francia festőként Victor Vasarely néven vált világhírűvé – képeire jellemző a formák és színek gazdagsága, életútja pedig tükrözi kultúránk európai kötődését.

A budapesti és pécsi múzeumokban összesen közel 500 Vasarely-alkotás van. Ezek a művész ajándékai – a szülőföld iránti hála és tisztelet szimbólumai. Vasarely gazdag életművéből a könyv alkotói és majdani olvasói segítségével választottunk. A szavazók a *Dirac, Kubtuz, Rikka, Sixa* és a *Tupa-fond* című képeket emelték ki. Közülük két olyan képet – a *Dirac* és a *Kubtuz* című festményeket – választottuk, amelyeken szakaszokból kör alakul ki – szemléltetve az informatika azon alapvető tulajdonságát, hogy a folytonos valós világot diszkrét objektumokkal (bitekkel) írja le – és amelyekhez sikerült felhasználási engedélyt kapnunk.

Közismert, hogy az elmúlt évszázadban nemcsak művészeink, hanem sok kiváló tudósunk is külföldön ért fel a csúcsra. Nagy részükre azonban folyamatosan számíthat a hazai oktatás és tudományos élet. A hálózati szimulációs fejezet szerzője Gyires Tibor (Illinois Egyetem), a játékelméleti fejezetet pedig Szidarovszky Ferenc (Arizonai Műszaki Egyetem) írta. A második kötetben a megbízhatóságról szóló fejezetet Gács Péter (Bostoni Egyetem) írta, a belsőpontos módszerekről szóló fejezet egyik szerzője pedig Terlaky Tamás (McMaster Egyetem). Ma mind a négy szerző az adott terület vezető kutatója, amerikai egyetemek professzora – egykor magyar egyetemen tanultak, majd tanítottak.

A rekurziós fejezet szerzője Kása Zoltán (Babeş-Bolyai Tudományegyetem), a szisztolikus rendszerekről szóló fejezetet Szakács Laura (Babeş-Bolyai Tudományegyetem) fordította németről magyarra. Részvételük a könyv megszületésében a határainkon túli magyar nyelvű oktatással való szoros kapcsolatunk része.

Könyvünk tartalmi gazdagsága jó külföldi – elsősorban német – kapcsolatainknak is köszönhető. Az első kötet kriptográfiai és bonyolultságelméleti fejezetét Jörg Rothe (Düsseldorfi Egyetem), szisztolikus rendszerekkel foglalkozó fejezetét Eberhard Zehendner (Friedrich Schiller Egyetem) írta. Az adattömörítési fejezet szerzője Ulrich Tamm (Chemnitzi Egyetem), a párhuzamos programozásról szóló fejezet egyik szerzője Claudia Leopold (Kasseli Egyetem), az ember-gép kapcsolatokkal foglalkozó fejezet szerzői Ingo Althöfer és Stefan Schwartz (Friedrich Schiller Egyetem).

Az alkotók (szerzők, lektorok, fordítók és segítőtársaik) többsége a hazai informatikai felsőoktatás meghatározó intézményeinek – Budapesti Corvinus Egyetem, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapesti Műszaki Főiskola, Debreceni Egyetem, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Miskolci Egyetem, Pécsi Tudományegyetem, Szegedi Tudományegyetem – oktatója.

Az *Oktatási Minisztérium* támogatásának köszönhetően ez a tankönyv nagyon kedvező áron juthat el az Olvasókhoz. Ugyancsak az Oktatási Minisztérium támogatásának köszönhető, hogy 2005 tavaszától a könyv elektronikus változata is mindenki számára szabadon hozzáférhető lesz.

Az alábbi kollégáknak köszönjük, hogy a tervezett könyv mindkét formáját támogatták: Fazekas Gábor egyetemi docens (Debreceni Egyetem Informatikai Karának dékánhelyettese), Imreh Balázs egyetemi docens (Szegedi Egyetem), Kása Zoltán egyetemi tanár (BBTE Matematikai és Informatikai Karának dékánhelyettese), Kozma László egyetemi docens (ELTE Informatikai Karának dékánja), Jörg Rothe egyetemi tanár (Heinrich Heine Universität, Düsseldorf), Sima Dezső főiskolai tanár (Budapesti Műszaki Főiskola Neumann János Informatikai Karának főigazgatója), Sidló Csaba PhD hallgató (ELTE Informatikai Doktori Iskola), Szeidl László egyetemi tanár (Pécsi Tudományegyetem Matematikai és Informatikai Intézet igazgatója), Szidarovszky Ferenc egyetemi tanár (Arizonai Műszaki Egyetem), Szirmay-Kalos László egyetemi tanár (BME Villamosmérnöki és Informatikai Kara), Terlaky Tamás egyetemi tanár (McMaster Egyetem, Hamilton)

Ugyancsak köszönjük azoknak a kollégáinknak a segítőkészségét, akiknek a lektori véleményét csatolni tudtuk a pályázathoz: Fekete István egyetemi docens (*Rekurziók* című fejezet), Fridli Sándor egyetemi docens (*Adattömörítés*), Gonda János egyetemi docens (*Kriptográfia*), Hunyadvári László egyetemi docens és Katsányi István PhD hallgató (*Bioinformatika*), Kiss Attila egyetemi docens (*Relációs adatbázisok tervezése*), Tőke Pál egyetemi docens (*Hálózatok szimulációja*), Vida János egyetemi docens (*Grafika*).

Az elektronikus változat elkészültéig a

http://people.inf.elte.hu/tony/konyvek/infalg

című honlapon találják meg olvasóink a könyv kiegészítését, amely többek között az élő irodalomjegyzéket, a névmutatót, a gyakorlatok és feladatok egy részének megoldását, működő programokat, a talált hibák jegyzékét tartalmazza. Ezen a honlapon keresztül fogjuk Olvasóinkat tájékoztatni az elektronikus változat hálózati címéről.

Köszönet illeti azokat – **Bánsághi Anna** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Benyó Tamás** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Biró Gabriella** (programtervező matematikus), **Csörnyei Zoltán** egyetemi docens, (ELTE), **Gyires Tibor** egyetemi tanár (Illinois Egyetem), **Imrényi Katalin** tanszéki előadó (ELTE), **Iványi Anna** program koordináror (CEEWEB), **Iványi Antal** (villamosmérnök), **Kása Zoltán** egyetemi tanár (BBTE), **Kurucz Miklós** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Locher Kornél** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Rét Anna** szerkesztő (Műszaki Könyvkiadó), **Rónyai Lajos** egyetemi tanár (BME), **Sima Dezső** főiskolai tanár (BMF), **Szabados Kristóf** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Szendrei Rudolf** programtervező matematikus hallgató (ELTE), **Szidarovszky Ferenc** egyetemi tanár (Arizonai Műszaki Egyetem), **Szirmay-Kalos László** egyetemi tanár (BME), **Takács Dániel** programtervező matematikus hallgató (ELTE) – akik észrevételeikkel segítettek a könyvünk alapjául szolgáló mű, az *Informatikai algoritmusok I* első kiadásának javításában.

A későbbiekben szeretnénk mind az első nyomtatott kiadás, mind az elektronikus kiadás hibáit kijavítani. Ezért kérjük a könyv Olvasóit, hogy javaslataikat, észrevételeiket küldjék el a tony@inf.elte.hu címre – levelükben lehetőleg pontosan megjelölve a hiba előfordulási helyét, és megadva a javasolt szöveget.

Olvasóink javaslataikkal, kérdéseikkel megkereshetik a könyv alkotóit is (címük megtalálható a kolofonoldalon).

Budapest, 2004. december 3.

Iványi Antal
alkotó szerkesztő

I. ALAPOK

Bevezetés

Ebben az alapozó részben négy témakört tárgyalunk.

Az informatikai algoritmusok elemzése során gyakran előfordul, hogy például felismerjük az n és $n + 1$ méretű feladatok megoldási ideje közötti kapcsolatot – és ennek az úgynevezett rekurzív egyenletnek a felhasználásával szeretnénk közvetlenül felírni az n méretű bemenethez tartozó futási időt. Az első fejezet a *rekurzív egyenletek* leggyakrabban előforduló típusainak megoldási módszereit mutatja be.

A mai számítógépek sebessége és tárolókapacitása, valamint az elméleti eredmények számos olyan feladat kényelmes (mechanikus) megoldását lehetővé teszik, melyeket korábban nem, vagy csak nagy nehézségek árán tudtunk kezelni. Ezek egy része – mint a formális differenciálás és integrálás – a második fejezetben tárgyalt *komputeralgebrához* tartozik.

Az elektronikus kommunikáció hatalmas iramú terjedésével együtt nő a kommunikáció biztonságának jelentősége. Ezért a mai informatika egyik kulcsfontosságú területe a *kriptográfia,* mellyel a könyv harmadik fejezete foglalkozik.

Az algoritmusok elemzésének hagyományosan fontos része az erőforrásigény legrosszabb esetre vonatkozó felső korlátjának megadása. Az csak az utóbbi 15 évben vált természetessé, hogy az erőforrásigényre vonatkozó – a probléma és a megengedett algoritmusok tulajdonságain alapuló – alsó korlátokat is megadnak.

Például Donald Knuth *The Art of Computer Programming* című monográfiájának 1968-ban megjelent első kötetében szerepelt az aszimptotikus felső korlátok jellemzésére használt O-jelölés *(nagy ordo)* definíciója – ugyanakkor még nem szerepelt az alsó korlátok jellemzésére alkalmas Ω-jelölés, valamint a pontos nagyságrend megadására alkalmas Θ-jelölés. Az *Introduction to Algorithms* 1990-ben megjelent első kiadásában, a *Distributed Algorithms* 1996-ban megjelent első kiadásában, valamint Knuth könyvének 1997-ben megjelent harmadik kiadásában már az Ω-jelölés és a Θ-jelölés definíciója is szerepel.

A *negyedik fejezet* szerint a bonyolultságelmélet fontos feladata, hogy a problémákhoz és számítási modellekhez minél pontosabb alsó korlátokat adjon meg – ezzel is segítve a problémák erőforrásigény szerinti osztályozását.

A második kötetben fog megjelenni az *algebrai algoritmusok* elemzése.

1. Rekurzív egyenletek (Kása Zoltán)

Közismert a Fibonacci-számok rekurzív definíciója: ha F_n jelöli az n-edik Fibonacci-számot, akkor

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \ ,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \text{ha} \ \ n \geq 0 \ .$$

Szeretnénk explicit formában megadni F_n értékét tetszőleges n-re. A feladat tulajdonképpen olyan egyenlet megoldását kéri, amelyben az ismeretlen rekurzív módon van megadva, ezért ***rekurzív egyenletnek*** hívjuk. Itt a megoldás felfogható úgy, mint természetes számokon értelmezett függvény, mivel F_n minden n-re értelmezett. Az ilyen rekurzív egyenletet szokás még ***differenciaegyenletnek*** is nevezni, de nevezhetnénk akár ***diszkrét differenciálegyenletnek*** is.

1.1. definíció. *A **k-adrendű rekurzív egyenlet** ($k \geq 1$) egy*

$$f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0, \qquad n \geq 0 \tag{1.1}$$

alakú egyenlet, ahol x_n-et kell explicit formában megadnunk.

Ahhoz, hogy egyértelműen meghatározhassuk x_n-et, meg kell adnunk k kezdőértéket, ezek általában $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Ezek az értékadások ***kezdeti feltételeknek*** tekinthetők.

Mivel a Fibonacci-számokat definiáló egyenlet másodrendű rekurzív egyenlet, ezért ott két kezdeti értéket adunk meg.

Az (1.1) egyenletet és annak adott kezdeti feltételeit kielégítő $x_n = g(n)$ sorozatot az adott egyenlet ***partikuláris megoldásának*** nevezzük. Ha az $x_n = h(n, C_1, C_2, \ldots, C_k)$ sorozatból – a $C_1, C_2, \ldots, C_k$ állandók alkalmas megválasztásával – az (1.1) egyenlet minden partikuláris megoldása előállítható, akkor a sorozatot az egyenlet ***általános megoldásának*** nevezzük.

A rekurzív egyenletek megoldása általában nem egyszerű. A következőkben sajátos esetekben alkalmazható módszereket ismertetünk.

Az írásmódban függvény helyett inkább sorozatot használunk (ami tulajdonképpen természetes számokon értelmezett függvény). Így a jelölés egyszerűbb lesz, $x(n)$ helyett mindenhol x_n-t írunk.

A fejezet három részből áll. Az 1.1. alfejezetben a lineáris rekurzív egyenletek megoldásával, a 1.2. alfejezetben a generátorfüggvények felhasználásával, az 1.3. alfejezetben pedig lineáris rekurzív egyenletek numerikus megoldásával foglalkozunk.

1.1. Lineáris rekurzív egyenletek

Ha a rekurzív egyenlet

$$f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1} + \cdots + f_k(n)x_{n+k} = f(n), \quad n \geq 0$$

alakú, ahol $f, f_0, f_1, \ldots, f_k$ természetes számokon értelmezett függvények, $f_0, f_k \neq 0$, és x_n-et kell explicit módon megadnunk, akkor ***lineáris*** rekurzív egyenletről beszélünk. Ha f azonosan nulla, akkor az egyenlet ***homogén,*** és különben ***inhomogén.*** Amennyiben az $f_0, f_1, \ldots, f_k$ függvények mindegyike állandó, akkor ***állandó együtthatós*** lineáris rekurzív egyenletről van szó.

1.1.1. Állandó együtthatós homogén lineáris rekurzív egyenletek

Legyen

$$a_0x_n + a_1x_{n+1} + \cdots + a_kx_{n+k} = 0, \qquad n \geq k \ , \tag{1.2}$$

ahol $a_0, a_1, \ldots, a_k$ valós állandók, $a_0, a_k \neq 0$, $k \geq 1$. Amennyiben adva van k kezdeti érték (leggyakrabban $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$), az egyenlet megoldása egyértelműen meghatározható.

A megoldás érdekében rendeljük hozzá az egyenlethez a ***karakterisztikus egyenletét:***

$$a_0 + a_1r + \cdots + a_{k-1}r^{k-1} + a_kr^k = 0 \ , \tag{1.3}$$

amely valós együtthatós egyenlet. Ennek az egyenletnek k gyöke van a komplex számok körében. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ha r_0 valós megoldása a karakterisztikus egyenletnek, akkor $C_0r_0^n$ megoldása az (1.2) egyenletnek, ahol C_0 tetszőleges állandó.

Az (1.2) egyenlet általános megoldása

$$x_n = C_1x_n^{(1)} + C_2x_n^{(2)} + \cdots + C_kx_n^{(k)} \ ,$$

ahol $x_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ az (1.2) egyenlet lineárisan független megoldásai. A kezdeti feltételekből mindig meghatározhatók a $C_1, C_2, \ldots, C_k$ állandók egy k egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával.

A lineárisan független megoldásokat a karakterisztikus egyenlet gyökei szolgáltatják a következők szerint. Minden gyökhöz hozzárendelhető egy ***fundamentálisnak*** nevezett megoldás.

Különböző valós gyökök

Legyenek $r_1, r_2, \ldots, r_p$ a karakterisztikus egyenlet egymástól különböző valós gyökei. Ekkor

$$r_1^n, \ r_2^n, \ \ldots, \ r_p^n$$

megoldásai az (1.2) rekurzív egyenletnek, és

$$C_1r_1^n + C_2r_2^n + \cdots + C_pr_p^n \tag{1.4}$$

is az, tetszőleges C_1, C_2, $\ldots$, C_p állandókra. Ha $p = k$, akkor (1.4) a rekurzív egyenlet általános megoldása.

1.1. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_0 = 0, \ x_1 = 1$$

rekurzív egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$r^2 - r - 1 = 0 ,$$

amelynek gyökei

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

Ezek valósak és egymástól különböznek, tehát az egyenlet általános megoldása

$$x_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

A C_1 és C_2 meghatározhatók a kezdeti feltételekből. Ha figyelembe vesszük, hogy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 , \\ C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 . \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $C_1 = 1/\sqrt{5}$, $C_2 = -1/\sqrt{5}$. Így az általános megoldás

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n ,$$

amely éppen F_n, az n-edik Fibonacci-szám.

Többszörös valós gyökök

Legyen r egy p-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ekkor

$$r^n, \ nr^n, \ n^2 r^n, \ \ldots, \ n^{p-1} r^n$$

megoldásai az (1.2) rekurzív egyenletnek (az r többszörös gyökhöz tartozó fundamentális megoldások), és

$$(C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \cdots + C_{p-1} n^{p-1}) r^n \tag{1.5}$$

is megoldás, tetszőleges $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$ állandókra. Ha a karakterisztikus egyenletnek nincs más gyöke, akkor (1.5) a rekurzív egyenlet általános megoldása.

1.2. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, \quad x_0 = 1, \ x_1 = 3$$

rekurzív egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$r^2 - 4r + 4 = 0 ,$$

amelynek $r = 2$ kétszeres gyöke. Ekkor

$$x_n = (C_0 + C_1 n) 2^n$$

megoldása az egyenletnek.

A kezdeti feltételekből

$$\begin{aligned} C_0 &= 1\,, \\ 2C_0 + 2C_1 &= 3\,. \end{aligned}$$

Innen $C_0 = 1$, $C_1 = 1/2$, azaz az általános megoldás

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right)2^n \quad \text{vagy} \quad x_n = (n+2)2^{n-1}\,.$$

Egyszeres komplex gyökök

Ha a trigonometrikus alakban felírt $a(\cos b + i \sin b)$ komplex szám gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az $a(\cos b - i \sin b)$ konjugált is az, mivel a karakterisztikus egyenlet valós együtthatós. Ekkor

$$a^n \cos bn \quad \text{és} \quad a^n \sin bn$$

megoldása az (1.2) rekurzív egyenletnek és

$$C_1 a^n \cos bn + C_2 a^n \sin bn \tag{1.6}$$

is az, tetszőleges C_1 és C_2 állandókra. Ha a karakterisztikus egyenletnek nincsenek más gyökei, akkor (1.6) általános megoldás.

1.3. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n, \quad x_0 = 0, \; x_1 = 1$$

rekurzív egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$r^2 - 2r + 2 = 0\,,$$

amelynek gyökei $1 + i$ és $1 - i$, trigonometrikus alakban: $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ és $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4))$. Ezért a rekurzív egyenletnek

$$x_n = C_1(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + C_2(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$$

megoldása. A kezdeti feltételekből

$$\begin{aligned} C_1 &= 0\,, \\ C_1\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + C_2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} &= 1\,. \end{aligned}$$

Innen azt kapjuk, hogy $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Az általános megoldás tehát

$$x_n = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}\,.$$

Többszörös komplex gyökök

Ha a trigonometrikus alakban felírt $a(\cos b + i \sin b)$ komplex szám p-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az $a(\cos b - i \sin b)$ konjugált is az.

Ekkor az (1.2) rekurzív egyenletnek

$$a^n \cos bn,\ na^n \cos bn,\ \ldots,\ n^{p-1}a^n \cos bn$$

és

$$a^n \sin bn,\ na^n \sin bn,\ \ldots,\ n^{p-1}a^n \sin bn$$

megoldásai. Ekkor megoldás

$$(C_0 + C_1 n + \cdots + C_{p-1}n^{p-1})a^n \cos bn + (D_0 + D_1 n + \cdots + D_{p-1}n^{p-1})a^n \sin bn$$

is, ahol $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}, D_0, D_1, \ldots, D_{p-1}$ tetszőleges állandók, amelyek meghatározhatók a kezdeti feltételekből. Ez általános megoldás, ha a karakterisztikus egyenletnek nincsenek más gyökei.

1.4. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+4} + 2x_{n+2} + x_n = 0,\quad x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$$

rekurzív egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0\ ,$$

amely $(r^2+1)^2 = 0$ alakban is írható, és amelynek i és $-i$ kétszeres gyöke. Ezek trigonometrikus alakja

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},\quad \text{valamint}\quad -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\ .$$

Ezért az általános megoldás

$$x_n = (C_0 + C_1 n)\cos\frac{n\pi}{2} + (D_0 + D_1 n)\sin\frac{n\pi}{2}\ .$$

A kezdeti feltételekből következik:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0\ ,\\
(C_0 + C_1)\cos\frac{\pi}{2} + (D_0 + D_1)\sin\frac{\pi}{2} &= 1\ ,\\
(C_0 + 2C_1)\cos\pi + (D_0 + 2D_1)\sin\pi &= 2\ ,\\
(C_0 + 3C_1)\cos\frac{3\pi}{2} + (D_0 + 3D_1)\sin\frac{3\pi}{2} &= 3\ ,
\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0\ ,\\
D_0 + D_1 &= 1\ ,\\
-2C_1 &= 2\ ,\\
-D_0 - 3D_1 &= 3\ ,
\end{aligned}$$

és innen $C_0 = 0$, $C_1 = -1$, $D_0 = 3$ és $D_1 = -2$. Az általános megoldás tehát

$$x_n = (3 - 2n)\sin\frac{n\pi}{2} - n\cos\frac{n\pi}{2}\ .$$

A most vizsgált négy eset segítségével bármilyen állandó együtthatós homogén egyenletet megoldhatunk.

1.5. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+3} = 4x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1$$

rekurzív egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$r^3 - 4r^2 + 6r - 4 = 0\ ,$$

amelynek gyökei: 2, $1 + i$ és $1 - i$. Ezért az általános megoldás

$$x_n = C_1 2^n + C_2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + C_3(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}\ .$$

Az állandók meghatározása után

$$x_n = -2^{n-1} + \frac{(\sqrt{2})^n}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{4}\right)\ .$$

Általános megoldás

Az (1.2) k-adrendű homogén lineáris rekurzív egyenlethez rendelt karakterisztikus egyenletnek összesen k gyöke van a komplex számok között, amelyek nem feltétlenül különbözők. Legyenek ezek a gyökök a következők:

r_1 valós, p_1-szeres $(p_1 \geq 1)$,
r_2 valós, p_2-szeres, $(p_2 \geq 1)$,
...
r_t valós, p_t-szeres, $(p_t \geq 1)$,
$s_1 = a_1(\cos b_1 + i\sin b_1)$ komplex, q_1-szeres $(q_1 \geq 1)$,
$s_2 = a_2(\cos b_2 + i\sin b_2)$ komplex, q_2-szeres $(q_2 \geq 1)$,
...
$s_m = a_m(\cos b_m + i\sin b_m)$ komplex, q_m-szeres $(q_m \geq 1)$.

Mivel összesen k gyök van, $p_1 + p_2 + \cdots + p_t + 2(q_1 + q_2 + \cdots + q_m) = k$.
Ekkor az (1.2) rekurzív egyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{j=1}^{t}\left(C_0^{(j)} + C_1^{(j)} n + \cdots + C_{p_j-1}^{(j)} n^{p_j-1}\right) r_j^n \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\left(D_0^{(j)} + D_1^{(j)} n + \cdots + D_{q_j-1}^{(j)} n^{q_j-1}\right) a_j^n \cos b_j n \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\left(E_0^{(j)} + E_1^{(j)} n + \cdots + E_{q_j-1}^{(j)} n^{q_j-1}\right) a_j^n \sin b_j n\ , \end{aligned} \tag{1.7}$$

ahol
$C_0^{(j)},\ C_1^{(j)},\ \ldots,\ C_{p_j-1}^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots, t\ ,$

$D_0^{(l)},\ E_0^{(l)},\ D_1^{(l)},\ E_1^{(l)},\ \ldots,\ D_{p_l-1}^{(l)},\ E_{p_l-1}^{(l)},\ l = 1, 2, \ldots, m$ állandók, melyek a kezdeti feltételekből meghatározhatók.

Az eddigiek a következő tételben foglalhatók össze.

1.2. tétel. *Legyen $k \geq 1$ egész, $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_k$ valós számok, $a_0,\ a_k \neq 0$. Az (1.2) lineáris rekurzív egyenlet általános megoldása előállítható az (1.3) karakterisztikus egyenlet r_i gyökeiből képezett $n^j r_i^n$ alakú tagok lineáris kombinációjaként, ahol a p_i-szeres r_i gyök esetében $0 \leq j < p$ és a lineáris kombináció együtthatói a kezdeti feltételektől függnek.*

A tétel bizonyítását az Olvasóra hagyjuk (lásd 1.1-5. gyakorlat).

A megoldás lépéseit a következőképpen foglalhatjuk össze. Feltesszük, hogy az egyenlet együtthatóit az A tömb, a megoldás állandóit pedig a C tömb tartalmazza.

Homogén-lineáris

1 írjuk fel a rekurzív egyenlet karakterisztikus egyenletét
2 keressük meg a karakterisztikus egyenlet összes gyökét, multiplicitásukkal együtt
3 írjuk fel az (1.7) általános megoldást a gyökök alapján
4 a kezdeti feltételekből, ha léteznek, határozzuk meg az (1.7)-ben szereplő állandókat

1.1.2. Állandó együtthatós inhomogén lineáris rekurzív egyenletek

Az állandó együtthatós inhomogén lineáris rekurzív egyenlet általános alakja

$$a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_k x_{n+k} = f(n)\ , \tag{1.8}$$

ahol $a_0, a_1, \ldots, a_k$ valós állandók, $a_0, a_k \neq 0,\ k \geq 1$, és $f(n)$ nem azonosan nulla.

Az egyenlethez tartozó (1.2) homogén lineáris egyenletet az 1.2. tétel szerint meg tudjuk oldani. Ha ismerjük az (1.8) egyenlet egy partikuláris megoldását, akkor az (1.8) egyenlet általános megoldását is elő tudjuk állítani.

1.3. tétel. *Legyen $k \geq 1$ egész, $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_k$ valós számok, $a_0,\ a_k \neq 0$. Ha $x_n^{(1)}$ az (1.8) lineáris inhomogén rekurzív egyenlet egy partikuláris megoldása és $x_n^{(0)}$ az (1.8) egyenlethez tartozó (1.2) homogén lineáris egyenlet általános megoldása, akkor*

$$x_n = x_n^{(0)} + x_n^{(1)}$$

általános megoldása az (1.8) egyenletnek.

A tétel bizonyítását meghagyjuk az Olvasónak (lásd 1.1-6. gyakorlat).

1.6. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 2^n, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1$$

rekurzív egyenletet. Először megoldjuk az

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$$

$f(n)$	$x_n^{(1)}$
$n^p a^n$	$(C_0 + C_1 n + \cdots + C_p n^p)a^n$
$a^n n^p \sin bn$	$(C_0 + C_1 n + \cdots + C_p n^p)a^n \sin bn + (D_0 + D_1 n + \cdots + D_p n^p)a^n \cos bn$
$a^n n^p \cos bn$	$(C_0 + C_1 n + \cdots + C_p n^p)a^n \sin bn + (D_0 + D_1 n + \cdots + D_p n^p)a^n \cos bn$

1.1. ábra. A partikuláris megoldás alakja.

homogén egyenletet, amelynek általános megoldása

$$x_n^{(0)} = C_1(-2)^n + C_2 ,$$

mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei -2 és 1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $x_n^{(1)} = 2^{n-2}$ megoldása az eredeti, inhomogén egyenletnek. Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2 + 2^{n-2} .$$

A C_1 és C_2 állandókat meghatározhatjuk a kezdeti feltételekből. Ennek alapján az általános megoldás

$$x_n = -\frac{1}{4}(-2)^n + 2^{n-2} \quad \text{vagy} \quad x_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4} ,$$

azaz

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} , \\ 2^{n-1}, & \text{ha } n \text{ páratlan} . \end{cases}$$

A partikuláris megoldás meghatározható a *konstansok variálásának módszerével.* Léteznek azonban olyan esetek, amikor a partikuláris megoldást könnyebben is megkaphatjuk. Az 1.1. ábrán olyan $f(n)$ függvényeket adunk meg, amelyek esetében az $x_n^{(1)}$ partikuláris megoldás a táblázatban megadott alakban kereshető. Az állandókat az egyenletbe való behelyettesítéssel kaphatjuk meg.

Előző példánk esetében $f(n) = 2^n$, tehát az első esetet alkalmazzuk, amikor $a = 2$, $p = 0$, ezért a $C_0 2^n$-nel próbálkozunk. Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $C_0 = 1/4$, tehát a partikuláris megoldás

$$x_n^{(1)} = 2^{n-2} .$$

Gyakorlatok

1.1-1. Oldjuk meg az alábbi inhomogén lineáris rekurzív egyenletet:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad \text{ha } n \geq 1, \text{ és } \quad H_0 = 0 .$$

(H_n itt a Hanoi-tornyai nevű feladat megoldásához szükséges – és egyben elégséges – lépések számát jelenti.)

1.1-2. Elemezzük a Hanoi-tornyaira vonatkozó feladatot abban az esetben, amikor úgy kell n korongot átrakni az A rúdról a C rúdra, hogy közben az A rúdról a C rúdra *nem* szabad korongot átrakni.

Útmutatás. Mutassuk meg, hogy ha az optimális algoritmus lépéseinek száma M_n és $n \geq 1$, akkor $M_n = 3M_{n-1} + 2$.

1.1-3. Oldjuk meg a következő rekurzív egyenletet:

$$(n+1)R_n = 2(2n-1)R_{n-1}, \quad \text{ha } n \geq 1, \text{ és} \quad R_0 = 1.$$

1.1-4. Oldjuk meg alábbi inhomogén lineáris rekurzív egyenletet:

$$x_n = 2^n - 2 + 2x_{n-1}, \quad \text{ha } n \geq 2, \quad \text{és} \quad x_1 = 0.$$

Útmutatás. Keressük a partikuláris megoldást $C_1 n 2^n + C_2$ alakban.

1.1-5.★ Bizonyítsuk be az 1.2. tételt.

1.1-6.★ Bizonyítsuk be az 1.3. tételt.

1.2. Generátorfüggvények és rekurzív egyenletek

A generátorfüggvényeket, többek között, felhasználhatjuk rekurzív egyenletek megoldására, bizonyos objektumok (pl. bináris fák) megszámolására, azonosságok bizonyítására, partíciós problémák megoldására. Az objektumok megszámolása rekurzív egyenletek felállításával és megoldásával történik. Ezek a rekurzív egyenletek általában nem lineárisak, megoldásukban segíthetnek a generátorfüggvények.

1.2.1. Értelmezés és műveletek

Egy $(a_n)_{n\geq 0} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ végtelen számsorozathoz hozzárendelhetünk egy hatványsort a következőképpen:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n z^n ,$$

amelyet az $(a_n)_{n\geq 0}$ számsorozat ***generátorfüggvényének*** nevezünk.

Például a Fibonacci-számok esetében a generátorfüggvény a következő:

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + 13z^7 + \cdots .$$

Ha mindkét oldalt megszorozzuk z-vel, majd z^2-tel, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
F(z) &= F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + \cdots + F_n z^n + \cdots , \\
zF(z) &= F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + \cdots + F_{n-1} z^n + \cdots , \\
z^2 F(z) &= F_0 z^2 + F_1 z^3 + \cdots + F_{n-2} z^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Ha kivonjuk tagonként az első képletből a másodikat, majd a harmadikat, és figyelembe vesszük a Fibonacci-számokat definiáló képletet, a következőt kapjuk:

$$F(z)(1 - z - z^2) = z ,$$

ahonnan

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} . \tag{1.9}$$

A fenti számítások helyességét matematikailag igazolni lehet, de nem térünk ki erre. A generátorfüggvények segítségével, formális műveletek során kapott eredményeket a legtöbb esetben más módszerekkel is lehet igazolni.

Tekintsük az

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ és } B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

generátorfüggvényeket.

Az $A(z)$ és $B(z)$ generátorfüggvényeket akkor és csakis akkor mondjuk *egyenlőnek,* ha $a_n = b_n$ bármely n természetes számra.

Ezután a következő, generátorfüggvényekkel végezhető műveleteket definiáljuk: összeadás és valós számmal való szorzás, eltolás, szorzás, deriválás, integrálás.

Összeadás és valós számmal való szorzás

$$\alpha A(z) + \beta B(z) = \sum_{n\geq 0} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n .$$

Eltolás

A

$$z^k A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+k} = \sum_{n\geq k} a_{n-k} z^n$$

generátorfüggvény a $< \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, a_0, a_1, \dots >$ számsorozatot jelképezi, míg az

$$\frac{1}{z^k}(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_{k-1} z^{k-1}) = \sum_{n\geq k} a_n z^{n-k} = \sum_{n\geq 0} a_{k+n} z^n$$

generátorfüggvény az $< a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots >$ sorozatot.

1.7. példa. Legyen $A(z) = 1 + z + z^2 + \cdots$. Ekkor

$$\frac{1}{z}\Big(A(z) - 1\Big) = A(z) \quad \text{és} \quad A(z) = \frac{1}{1 - z} .$$

Szorzás

Ha $A(z)$ és $B(z)$ generátorfüggvények, akkor

$$\begin{aligned} A(z)B(z) &= (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} s_n z^n, \end{aligned}$$

ahol $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Sajátos eset. Ha $b_n = 1$ bármely n természetes számra, akkor

$$A(z)\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) z^n . \tag{1.10}$$

Ha még ezenkívül $a_n = 1$ is igaz bármely n természetes számra, akkor

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n . \tag{1.11}$$

Deriválás

$$A'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n .$$

1.8. példa. Az

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

generátorfüggvény mindkét oldalát deriválva azt kapjuk, hogy

$$A'(z) = \sum_{n\geq 1} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} .$$

Integrálás

$$\int_0^z A(t)dt = a_0 z + \frac{1}{2}a_1 z^2 + \frac{1}{3}a_2 z^3 + \cdots = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}a_{n-1}z^n .$$

1.9. példa. Legyen

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$\ln\frac{1}{1-z} = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}z^n .$$

Ha a két fenti generátorfüggvényt összeszorozzuk, akkor

$$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 1} H_n z^n ,$$

ahol $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $\quad (H_0 = 0,\quad H_1 = 1)$ az ún. *harmonikus számok.*

Argumentum cseréje

Legyen $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, amely az $< a_0, a_1, a_2, \ldots >$ sorozatot jelképezi, akkor $A(cz) = \sum_{n\geq 0} c^n a_n z^n$ pedig az $< a_0, ca_1, c^2a_2, \ldots c^n a_n, \ldots >$ sorozatot. Igazak még a következők is:

$$\frac{1}{2}\Big(A(z) + A(-z)\Big) = a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_{2n} z^{2n} + \cdots ,$$

$$\frac{1}{2}\Big(A(z) - A(-z)\Big) = a_1 z + a_3 z^3 + \cdots + a_{2n-1} z^{2n-1} + \cdots .$$

1.10. példa. Legyen $A(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-z}$. Ekkor

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots = \frac{1}{2}(A(z) + A(-z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{1-z^2} ,$$

amely megkapható úgyis, hogy z-t z^2-tel helyettesítjük $A(z)$-ben.

Hasonlóképpen, megkaphatjuk a páratlan kitevőjű tagok összegét:

$$z + z^3 + z^5 + \cdots = \frac{1}{2}(A(z) - A(-z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{z}{1-z^2} .$$

A generátorfüggvények segítségével érdekes képleteket kaphatunk. Legyen például $A(z) = 1/(1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$. Ekkor $zA(z(1+z)) = F(z)$, vagyis éppen a Fibonacci-számok generátorfüggvénye. A fenti képletből

$$zA(z(1+z)) = z + z^2(1+z) + z^3(1+z)^2 + z^4(1+z)^3 + \cdots .$$

A z^{n+1} együtthatója a bal oldalon éppen F_{n+1}, vagyis az $(n+1)$-edik Fibonacci-szám, míg a z^{n+1} jobb oldali együtthatója, a binomiális képlet alkalmazása után minden tagban

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k} .$$

Innen

$$F_{n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} . \tag{1.12}$$

Emlékeztetünk, hogy a binomiális képlet általánosítható tetszőleges valós r-re is, vagyis

$$(1+z)^r = \sum_{n\geq 0} \binom{r}{n} z^n ,$$

amely a binomiális együtthatók generátorfüggvénye. Itt $\dbinom{r}{n}$ a kombináció általánosítása valós r-re, vagyis

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n(n-1)\ldots 1}, & \text{ha } n > 0 , \\ 1, & \text{ha } n = 0 , \\ 0, & \text{ha } n < 0 . \end{cases}$$

A binomiális képlet fenti általánosításával (negatív r-re) egy, sok esetben hasznos képletet kapunk. Legyen

$$\frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{k\geq 0} \binom{-m}{k} (-z)^k \ .$$

Mivel egyszerű számítással igazolható, hogy

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} ,$$

a következő képletet kapjuk:

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{m+k}{k} z^k \ .$$

Ekkor

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{m+k}{k} z^{m+k} = \sum_{k\geq 0} \binom{m+k}{m} z^{m+k} = \sum_{k\geq 0} \binom{k}{m} z^k \ .$$

Innen pedig

$$\sum_{k\geq 0} \binom{k}{m} z^k = \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} , \tag{1.13}$$

ahol m természetes szám.

1.2.2. Rekurzív egyenletek megoldása generátorfüggvényekkel

Ha a megoldandó rekurzív egyenlet olyan, hogy a megoldás generátorfüggvénye sorba fejthető úgy, hogy az együtthatók zárt alakban felírhatók, akkor ez a módszer eredményre vezet. Legyen adott a következő rekurzív egyenlet:

$$F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}) = 0 \ . \tag{1.14}$$

A megoldáshoz tekintsük az

$$X(z) = \sum_{n\geq 0} x_n z^n$$

generátorfüggvényt. Ha (1.14) felírható $G(X(z)) = 0$ egyenletként, amelyet meg tudunk oldani $X(z)$-re, majd $X(z)$-t sorba lehet fejteni úgy, hogy x_n zárt alakban felírható, akkor az (1.14) egyenletet sikerrel oldottuk meg.

A következőkben általános módszert adunk az inhomogén lineáris egyenletek megoldására. Ezután három nemlineáris feladatra mutatunk példát. Két esetben bináris fák valamilyen halmazának az elemeit számoljuk meg, a harmadikban pedig a bináris fák leveleit. A három nemlineáris rekurzív egyenlet az (1.15), (1.17) és (1.18), amelyeket a generátorfüggvények segítségével oldunk meg.

Állandó együtthatós inhomogén lineáris rekurzív egyenlet

Szorozzuk be z^n-nel az (1.8) egyenlet mindkét oldalát. Ekkor

$$a_0 x_n z^n + a_1 x_{n+1} z^n + \cdots + a_k x_{n+k} z^n = f(n) z^n \ .$$

Összegezzük tagonként a fenti egyenlet mindkét oldalát:

$$a_0 \sum_{n\geq 0} x_n z^n + a_1 \sum_{n\geq 0} x_{n+1} z^n + \cdots + a_k \sum_{n\geq 0} x_{n+k} z^n = \sum_{n\geq 0} f(n) z^n \ .$$

Innen átalakításokkal kapjuk, hogy

$$a_0 \sum_{n\geq 0} x_n z^n + \frac{a_1}{z} \sum_{n\geq 0} x_{n+1} z^{n+1} + \cdots + \frac{a_k}{z^k} \sum_{n\geq 0} x_{n+k} z^{n+k} = \sum_{n\geq 0} f(n) z^n \ .$$

Legyen

$$X(z) = \sum_{n\geq 0} x_n z^n \quad \text{és} \quad F(z) = \sum_{n\geq 0} f(n) z^n \ .$$

Ekkor az egyenletünk így alakul:

$$a_0 X(z) + \frac{a_1}{z}\Big(X(z) - x_0\Big) + \cdots + \frac{a_k}{z^k}\Big(X(z) - x_0 - x_1 z - \cdots - x_{k-1} z^{k-1}\Big) = F(z) \ .$$

Ezt az egyenletet meg lehet oldani $X(z)$-ben. Az $X(z)$ kifejezésében a jobb oldali racionális törtet fel lehet bontani elemi (parciális) törtekre, majd azokat sorba fejtve meghatározhatjuk az eredeti egyenlet x_n általános megoldását, figyelembe véve a kezdeti feltételeket.

1.11. példa. Oldjuk meg a fenti módszerrel a következő egyenletet:

$$x_{n+1} - 2x_n = 2^{n+1} - 2, \ \text{ha } n \geq 0 \quad \text{és } x_0 = 0 \ .$$

Beszorzás és összegezés után

$$\frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} x_{n+1} z^{n+1} - 2 \sum_{n\geq 0} x_n z^n = 2 \sum_{n\geq 0} 2^n z^n - 2 \sum_{n\geq 0} z^n \ ,$$

innen pedig

$$\frac{1}{z}\Big(X(z) - x_0\Big) - 2X(z) = \frac{2}{1-2z} - \frac{2}{1-z} \ .$$

Mivel $x_0 = 0$, az egyenlet megoldása a következő, miután a jobb oldalt elemi törtekre bontottuk:[1]

$$X(z) = \frac{2z}{(1-2z)^2} - \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1-2z} \ .$$

Az

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n$$

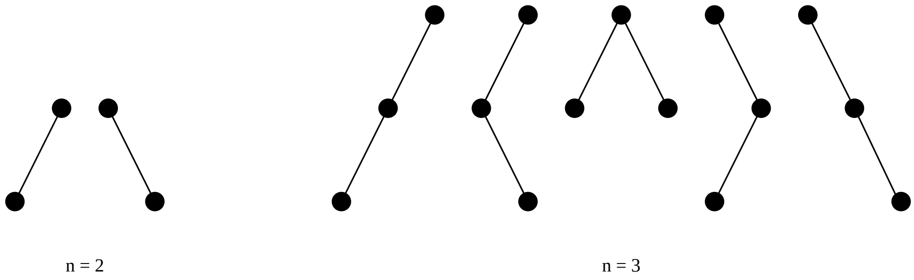
generátorfüggvény tagonkénti deriválásával a következőt kapjuk:

$$\frac{2}{(1-2z)^2} = \sum_{n\geq 1} n 2^n z^{n-1} \ .$$

Ezért

$$X(z) = \sum_{n\geq 0} n 2^n z^n + 2 \sum_{n\geq 0} z^n - 2 \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \sum_{n\geq 0} \Big((n-2)2^n + 2\Big) z^n \ ,$$

[1] Az elemi törtekre való bontást a határozatlan együtthatók módszerével végeztük.



1.2. ábra. Két- és háromcsúcsú bináris fák.

ahonnan

$$x_n = (n-2)2^n + 2 \ .$$

Bináris fák száma

Jelöljük b_n-nel az n csúcsú bináris fák számát. Ekkor $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 5$ (lásd az 1.2. ábrát). Legyen $b_0 = 1$. (Később látni fogjuk, hogy ez jó választás.)

Ha rögzítjük egy n csúcsú bináris fa gyökerét, akkor még $n-1$ csúcs marad a bal és jobb részfában összesen. Ha k csúcs van a bal oldali, $n-1-k$ pedig a jobb oldali részfában, akkor összesen $b_k b_{n-1-k}$ ilyen bináris fa létezik. Összegezve $k = 0, 1, \ldots, n-1$ értékekre, pontosan b_n-t kapjuk. Tehát tetszőleges $n \geq 1$ természetes számra a b_n-ben megoldandó rekurzív egyenlet a következő:

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 \ . \tag{1.15}$$

Ez még így is írható:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} \ .$$

A fenti rekurzív egyenlet mindkét oldalát z^n-nel szorozva, majd n szerint összegezve, a következőt kapjuk:

$$\sum_{n\geq 1} b_n z^n = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} \right) z^n \ . \tag{1.16}$$

Legyen $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ a b_n számok generátorfüggvénye. Az (1.15) összefüggés bal oldala éppen $B(z) - 1$ (mivel $b_0 = 1$). A jobb oldal nagyon hasonlít két generátorfüggvény szorzatához. Hogy észrevegyük, melyik két függvényről van szó, használjuk a következő jelölést:

$$A(z) = zB(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} b_{n-1} z^n \ .$$

Ekkor az (1.16) jobb oldala éppen $A(z)B(z)$, ami egyenlő $zB^2(z)$-vel. Innen

$$B(z) - 1 = zB^2(z), \qquad B(0) = 1 \ .$$

Oldjuk meg ezt az egyenletet $B(z)$-re. Ekkor

$$B(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z} \; .$$

Mivel $B(0) = 1$, csak a negatív jel megfelelő. Tehát

$$\begin{aligned}
B(z) &= \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) = \frac{1}{2z}\left(1-(1-4z)^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{2z}\left(1-\sum_{n\ge 0}\binom{1/2}{n}(-4z)^n\right) = \frac{1}{2z}\left(1-\sum_{n\ge 0}\binom{1/2}{n}(-1)^n 2^{2n} z^n\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \binom{1/2}{0}\frac{2^0 z^0}{2z} + \binom{1/2}{1}\frac{2^2 z}{2z} - \cdots - \binom{1/2}{n}(-1)^n\frac{2^{2n}z^n}{2z} + \cdots \\
&= \binom{1/2}{1}2 - \binom{1/2}{2}2^3 z + \cdots - \binom{1/2}{n}(-1)^n 2^{2n-1} z^{n-1} + \cdots \\
&= \sum_{n\ge 0}\binom{1/2}{n+1}(-1)^n 2^{2n+1} z^n = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} z^n \; .
\end{aligned}$$

Innen $b_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Megjegyzés. Az utolsó átalakításnál felhasználtuk a következő, könnyen bizonyítható összefüggést:

$$\binom{1/2}{n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n} \; .$$

Levelek száma *n* csúcsú bináris fák halmazában

Számítsuk ki az n csúcsú bináris fák halmazában a levelek (azaz első fokú csúcsok) számát. Jelöljük ezt a számot f_n-nel. Megjegyezzük, hogy a gyökeret akkor sem tekintjük levélnek, ha a fokszáma 1. Könnyű belátni, hogy $f_2 = 2$, $f_3 = 6$. Legyen $f_0 = 0$ és $f_1 = 1$ konvenció alapján.

Ahogy a bináris fák megszámolásánál, tekintsük most is az olyan n csúcsú bináris fákat, amelyeknek bal oldala k csúcsot, a jobb oldala pedig $n-k-1$ csúcsot tartalmaz. Bal oldalon b_k ilyen részfa van, jobb oldalon pedig b_{n-1-k}. Ha rögzítünk egy ilyen bal oldali részfát, akkor az összes jobb oldali részfát figyelembe véve, ott f_{n-1-k} levél van. Könnyen belátható tehát, hogy adott k-ra $b_{n-1-k}f_k + b_k f_{n-1-k}$ levél van. Ekkor, összegzés után

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f_k b_{n-1-k} + b_k f_{n-1-k}\right) \; .$$

Egyszerű számítással azt kapjuk, hogy

$$f_n = 2(f_0 b_{n-1} + f_1 b_{n-2} + \cdots + f_{n-1} b_0), \quad n \ge 2 \; . \tag{1.17}$$

Ez a megoldandó rekurzív egyenlet, amelynek megoldása f_n. Legyen

$$F(z) = \sum_{n\ge 0} f_n z^n \quad \text{és} \quad B(z) = \sum_{n\ge 0} b_n z^n \; .$$

Az (1.17) összefüggés mindkét oldalát z^n-nel szorozva, majd n szerint összeadva

$$\sum_{n\geq 2} f_n z^n = 2\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k b_{n-1-k}\right) z^n \; .$$

De, mivel $f_0 = 0$ és $f_1 = 1$,

$$F(z) - z = 2zF(z)B(z) \; .$$

Innen

$$F(z) = \frac{z}{1-2zB(z)} \; ,$$

de mivel

$$B(z) = \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right) \; ,$$

következik, hogy

$$F(z) = \frac{z}{\sqrt{1-4z}} = z(1-4z)^{-1/2} = z\sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-4z)^n \; .$$

A számítások elvégzése után

$$F(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1}\binom{2n-2}{n-1} z^n \; ,$$

innen pedig

$$f_n = \binom{2n-2}{n-1} \quad \text{vagy} \quad f_{n+1} = \binom{2n}{n} = (n+1)b_n \; .$$

A kombináció általánosítása alapján f_0 és f_1 a konvenció alapján megadott értékekkel lesznek egyenlők.

n csúcsú, *k* levelű bináris fák száma

Egy kicsit nehezebb feladat: hány n csúcsú k levelű bináris fa létezik? Jelöljük ezek számát $b_n^{(k)}$-val. Könnyű belátni, hogy $b_n^{(k)} = 0$, ha $k > \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Egyszerű okoskodással ki lehet számítani a $k = 1$ esetet, vagyis $b_n^{(1)} = 2^{n-1}$ tetszőleges $n \geq 1$ természetes számra. Legyen $b_0^{(0)} = 1$ konvenció alapján. Akárcsak az előző feladatoknál, itt is a bal és jobb oldali részfákat vizsgáljuk meg. Ha a bal oldali részfában i csúcs és j levél van, akkor a jobb oldaliban $n-i-1$ csúcs és $k-j$ levél van. A $b_i^{(j)} b_{n-i-1}^{(k-j)}$ szorzat éppen ezeknek a fáknak a száma. Összegezve k és j szerint, a következő rekurzív képletet kapjuk:

$$b_n^{(k)} = 2b_{n-1}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{k-1} b_i^{(j)} b_{n-i-1}^{(k-j)} \; . \tag{1.18}$$

Ennek a rekurzív egyenletnek a megoldására használjuk a következő generátorfüggvényt:

$$B^{(k)}(z) = \sum_{n\geq 0} b_n^{(k)} z^n, \qquad \text{ahol } k \geq 1 \; .$$

Az (1.18) egyenlet mindkét oldalát z^n-nel megszorozva, majd összeadva az $n = 0, 1, 2, \ldots$ értékekre, a következőt kapjuk:

$$\sum_{n\geq 1} b_n^{(k)} z^n = 2\sum_{n\geq 1} b_{n-1}^{(k)} z^n + \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{k-1} b_i^{(j)} b_{n-i-1}^{(k-j)}\right) z^n .$$

Az összegezés sorrendjét felcserélve

$$\sum_{n\geq 1} b_n^{(k)} z^n = 2\sum_{n\geq 1} b_{n-1}^{(k)} z^n + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n-2} b_i^{(j)} b_{n-i-1}^{(k-j)}\right) z^n .$$

Innen

$$B^{(k)}(z) = 2zB^{(k)}(z) + z\left(\sum_{j=1}^{k-1} B^{(j)}(z) B^{(k-j)}(z)\right)$$

vagy

$$B^{(k)}(z) = \frac{z}{1-2z}\left(\sum_{j=1}^{k-1} B^{(j)}(z) B^{(k-j)}(z)\right) . \tag{1.19}$$

Lépésről lépésre haladva, felírhatjuk a következőket.

$$B^{(2)}(z) = \frac{z}{1-2z}\left(B^{(1)}(z)\right)^2 ,$$

$$B^{(3)}(z) = \frac{2z^2}{(1-2z)^2}\left(B^{(1)}(z)\right)^3 ,$$

$$B^{(4)}(z) = \frac{5z^3}{(1-2z)^3}\left(B^{(1)}(z)\right)^4 .$$

Az általános megoldást megpróbáljuk a következő alakban keresni:

$$B^{(k)}(z) = \frac{c_k z^{k-1}}{(1-2z)^{k-1}}\left(B^{(1)}(z)\right)^k ,$$

ahol, amint láttuk, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 5$. Az (1.19) képletbe behelyettesítve, a c_k számokra egy rekurzív összefüggést kapunk:

$$c_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i c_{k-i} .$$

Ezt szintén a generátorfüggvények segítségével oldjuk meg. Ha $k = 2$, akkor $c_2 = c_1 c_1$, és innen $c_1 = 1$. Legyen $c_0 = 1$. Ha $C(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ a c_n számok generátorfüggvénye, akkor – figyelembe véve a generátorfüggvények szorzási képletét –

$$C(z) - 1 - z = (C(z)-1)^2 \quad \text{vagy} \quad C^2(z) - 3C(z) + z + 2 = 0 ,$$

amelyet $C(z)$-re nézve megoldunk, és a

$$C(z) = \frac{3 - \sqrt{1-4z}}{2}$$

képletet kapjuk, mivel $C(0) = 1$ miatt csak a negatív előjel jó. Sorba fejtés után

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1-4z)^{1/2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n} z^n \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} z^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} z^n \ . \end{aligned}$$

Innen

$$c_n = \frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 1 \ .$$

Mivel $b_n^{(1)} = 2^{n-1}$, ha $n \geq 1$, könnyen ellenőrizhető, hogy $B^{(1)} = z/(1-2z)$. Tehát

$$B^{(k)}(z) = \frac{1}{2(2k-1)}\binom{2k}{k}\frac{z^{2k-1}}{(1-2z)^{2k-1}} \ .$$

Mivel azonban

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+m-1}{n} z^n \ ,$$

a következő eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned} B^{(k)}(z) &= \frac{1}{2(2k-1)}\binom{2k}{k}\sum_{n\geq 0}\binom{2k+n-2}{n} 2^n z^{2k+n-1} \\ &= \frac{1}{2(2k-1)}\binom{2k}{k}\sum_{n\geq 2k-1}\binom{n-1}{n-2k+1} 2^{n-2k+1} z^n \ . \end{aligned}$$

Innen pedig

$$b_n^{(k)} = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}\binom{n-1}{2k-2} 2^{n-2k}$$

vagy

$$b_n^{(k)} = \frac{1}{n}\binom{2k}{k}\binom{n}{2k-1} 2^{n-2k} \ .$$

1.2.3. A Z-transzformáció módszere

Ha generátorfüggvényekkel oldunk meg egy inhomogén lineáris rekurzív egyenletet, akkor, amint láttuk, mindig egy racionális törtfüggvény sorba fejtése adja meg a megoldást. A Z-transzformáció módszerével ezt a sorba fejtést könnyebben elvégezhetjük. Legyen a racionális törtfüggvény $P(z)/Q(z)$, ahol $P(z)$ kisebb fokszámú, mint $Q(z)$. Ha ismerjük a nevező gyökeit, a törtfüggvényt elemi (vagy parciális) törtfüggvények összegére bonthatjuk a határozatlan együtthatók módszerével. Nézzük meg először azt az esetet, amikor a nevezőnek csak egyszeres (azaz egymástól különböző) gyökei vannak, és legyenek ezek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_i}{z-\alpha_i} + \cdots + \frac{A_k}{z-\alpha_k} \ .$$

Könnyen belátható, hogy

$$A_i = \lim_{z\to\alpha_i}(z-\alpha_i)\frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad i = 1,2,\dots,k\ .$$

Másfelől

$$\frac{A_i}{z-\alpha_i} = \frac{A_i}{-\alpha_i\left(1-\dfrac{1}{\alpha_i}z\right)} = \frac{-A_i\beta_i}{1-\beta_i z}\ ,$$

ahol $\beta_i = 1/\alpha_i$. Ha most ezt az elemi törtet sorba fejtjük, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{-A_i\beta_i}{1-\beta_i z} = -A_i\beta_i\left(1+\beta_i z+\cdots+\beta_i^n z^n+\cdots\right)\ .$$

Innen a z^n együtthatója $-A_i\beta_i^{n+1}$, és jelöljük ezt $C_i(n)$-nel. Ekkor

$$C_i(n) = -A_i\beta_i^{n+1} = -\beta_i\lim_{z\to\alpha_i}(z-\alpha_i)\frac{P(z)}{Q(z)}\ ,$$

vagy

$$C_i(n) = -\beta_i^{n+1}\lim_{z\to\alpha_i}\frac{(z-\alpha_i)P(z)}{Q(z)}\ .$$

Ha most elvégezzük a $z\to 1/z$ átalakítást, és figyelembe vesszük, hogy $\beta_i = 1/\alpha_i$, akkor

$$C_i(n) = \lim_{z\to\beta_i}\left((z-\beta_i)z^{n-1}\frac{p(z)}{q(z)}\right)\ ,$$

ahol

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{P(1/z)}{Q(1/z)}\ .$$

Ekkor az $X(z)$ kifejtésében a z^n együtthatója éppen

$$C_1(n)+C_2(n)+\cdots+C_k(n)\ .$$

Könnyen belátható, hogy ha α gyöke a $Q(z)$ polinomnak, akkor $\beta = 1/\alpha$ gyöke a $q(z)$ polinomnak. Például, ha

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{2z^z}{(1-z)(1-2z)}\ , \quad \text{akkor} \quad \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{2}{(z-1)(z-2)}\ .$$

Amennyiben egy gyök többszörös, például β_i p-szeres, akkor a neki megfelelő részeredmény

$$C_i(n) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to\beta_i}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left((z-\beta_i)^p z^{n-1}\frac{p(z)}{q(z)}\right)\ .$$

Itt $\dfrac{d^p}{dz^p}f(z)$ az $f(z)$ függvény p-edrendű deriváltját jelenti.

Az eddigiek a következő algoritmusban összegezhetők. Feltesszük, hogy az egyenlet együtthatóit a A, a megoldás állandóit pedig a C tömb tartalmazza.

Lineáris-inhomogén(A, k, f)

1 legyen az egyenlet $a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_k x_{n+k} = f(n)$;
szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát z^n-nel és összegezzünk n szerint
2 hozzuk az egyenletet $X(z) = P(z)/Q(z)$ alakra, ahol $X(z) = \sum_{n \geq 0} x_n z^n$,
$P(z)$ és $Q(z)$ pedig polinomok
3 végezzük el a $z \to 1/z$ átalakítást, legyen az eredmény
$p(z)/q(z)$, ahol $p(z)$ és $q(z)$ polinomok
4 legyenek $q(z)$ gyökei:
β_1 p_1-szeres, $p_1 \geq 1$,
β_2 p_2-szeres, $p_2 \geq 1$,
$\ldots$
β_k p_k-szeres, $p_k \geq 1$;
ekkor az eredeti egyenlet általános megoldása
$x_n = C_1(n) + C_2(n) + \cdots + C_k(n)$, ahol
$C_i(n) = 1/((p_i - 1)!) \lim_{z \to \beta_i} \frac{d^{p_i - 1}}{dz^{p_i - 1}} \left((z - \beta_i)^{p_i} z^{n-1} (p(z)/q(z)) \right)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
5 **return** C

A módszer neve onnan ered, hogy ha egy generátorfüggvényben z helyébe $1/z$-t helyettesítünk, akkor megkapjuk a Z-transzformáltját, amelyre hasonló műveletek léteznek, mint a generátorfüggvényekre, és amelyre alkalmazva a reziduum-tételt, a fenti eredményhez jutunk.

1.12. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+1} - 2x_n = 2^{n+1} - 2, \quad \text{ha} \quad n \geq 0, \quad x_0 = 0$$

rekurzív egyenletet.

z^n-nel beszorozva és összegezve

$$\sum_{n \geq 0} x_{n+1} z^n - 2 \sum_{n \geq 0} x_n z^n = \sum_{n \geq 0} 2^{n+1} z^n - \sum_{n \geq 0} 2z^n ,$$

azaz

$$\frac{1}{z} X(z) - 2X(z) = \frac{2}{1 - 2z} - \frac{2}{1 - z}, \quad \text{ahol } X(z) = \sum_{n \geq 0} x_n z^n .$$

Innen

$$X(z) = \frac{2z^2}{(1 - z)(1 - 2z)^2} .$$

A $z \to 1/z$ helyettesítést elvégezve

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{2z}{(z - 1)(z - 2)^2} ,$$

ahol a nevező gyökei: 1 egyszeres, 2 kétszeres gyök. Ezért

$$C_1 = \lim_{z \to 1} \frac{2z^n}{(z - 2)^2} = 2 \qquad \text{és}$$

$$C_2 = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{2z^n}{z - 1} \right) = 2 \lim_{z \to 2} \frac{n z^{n-1}(z - 1) - z^n}{(z - 1)^2} = 2^n (n - 2) .$$

Az általános megoldás tehát

$$x_n = 2^n(n-2) + 2, \quad n \geq 0 \,.$$

1.13. példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n, \quad \text{ha} \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1$$

rekurzív egyenletet.

z^n-nel beszorozva és összegezve

$$\frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0} x_{n+2}z^{n+2} = \frac{2}{z}\sum_{n\geq 0} x_{n+1}z^{n+1} - 2\sum_{n\geq 0} x_n z^n \,,$$

innen

$$\frac{1}{z^2}\Big(F(z) - z\Big) = \frac{2}{z}F(z) - 2F(z)\,,$$

azaz

$$F(z)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 2\right) = -\frac{1}{z}\,.$$

Ekkor

$$F(1/z) = \frac{-z}{z^2 - 2z + 2}\,.$$

A nevező gyökei $1+i$ és $1-i$. Kiszámítjuk $C_1(n)$-t és $C_2(n)$-t:

$$C_1(n) = \lim_{z\to 1+i} \frac{-z^{n+1}}{z-(1-i)} = \frac{i(1+i)^n}{2} \quad \text{és}$$

$$C_2(n) = \lim_{z\to 1-i} \frac{-z^{n+1}}{z-(1+i)} = \frac{-i(1-i)^n}{2}\,.$$

Mivel

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

hatványozás után

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right), \quad (1-i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\,,$$

$$x_n = C_1(n) + C_2(n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}\,.$$

Gyakorlatok

1.2-1. Számítsuk ki, hány olyan n csúcsú bináris fa van, amelynek sem a bal, sem pedig a jobb oldali részfája nem üres.

1.2-2. Számítsuk ki, hány olyan n csúcsú bináris fa van, amelyben minden levéltől különböző csúcsnak pontosan két gyereke van.

1.2-3. Oldjuk meg generátorfüggvény segítségével az alábbi rekurzív egyenletet.

$$H_n = 2H_{n-1} + 1, \quad H_0 = 0\,.$$

(H_n itt a Hanoi-tornyai nevű feladat lépésszámát jelenti.)

1.2-4. Oldjuk meg Z-transzformáció segítségével az alábbi rekurzív egyenletet:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n + 1, \text{ ha } n \geq 0, \quad \text{és} \quad F_0 = 0, F_1 = 1 \ .$$

1.2-5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} u_n &= v_{n-1} + u_{n-2} \ , \\ v_n &= u_n + u_{n-1} \ , \end{aligned}$$

ahol $u_0 = 1, u_1 = 2, v_0 = 1$.

1.3. Numerikus megoldás

Leírunk egy függvényeljárást, amellyel lineáris rekurzív egyenleteket oldhatunk meg numerikusan. Az egyenletet a szokásos módon, a következő formában adjuk meg:

$$a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_k x_{n+k} = f(n) \ .$$

Az $a_0, a_1, \ldots, a_k$ együtthatókat az A, míg az $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ kezdőértékeket az X vektor tartalmazza. Hogy kiszámítsuk x_n értékét, sorra kiszámítjuk az $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ értékeket, minden alkalommal az X vektor első k elemében (azaz a $0, 1, \ldots, k-1$ indexű elemekben) őrizve meg a sorozat előző k értékét.

Rekurzív(A, X, k, n, f)

```
 1 for j ← k to n
 2     do v ← A[0] · X[0]
 3        for i ← 1 to k − 1
 4            do v ← v + A[i] · X[i]
 5        v ← (f(j − k) − v)/A[k]
 6        if j ≠ n
 7          then for i ← 0 to k − 2
 8                   do X[i] ← X[i + 1]
 9               X[k − 1] ← v
10 return v
```

A 2–5. sorokban kiszámítjuk a következő x_j ($j = k, k+1, \ldots, n$) értékét (az előző k érték felhasználásával), ezt az értéket az algoritmusban v jelöli. A 7–9. sorokban, amennyiben még nem értük el az n-et, átmásoljuk az utolsó k értéket az X vektor első k elemébe. A 10. sor visszaadja az x_n értékét. Könnyen belátható, hogy az algoritmus futási ideje $\Theta(kn)$.

Gyakorlatok

1.3-1. Hány összeadást, kivonást, szorzást, osztást és értékadást végez a Rekurzív algoritmus, ha az 1.4. példában szereplő adatokkal kiszámítja x_{1000} értékét?

Feladatok

1-1. Homogén egyenlet megoldhatósága generátorfüggvénnyel
Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges homogén lineáris rekurzív egyenlet generátorfüggvénnyel való megoldáskor csak akkor fordulhat elő olyan eset, hogy nem tudjuk alkalmazni a megadott módszert, mivel az $X(z) = 0$ egyenlethez jutunk, ha az egyenlet megoldása $x_n = 0$ minden n-re.

1-2. Komplex gyökök Z-transzformáláskor
Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a Z-transzformáció módszere alkalmazásakor a nevező gyökei komplex számok. A rekurzív egyenlet megoldásának mindig valósnak kell lennie. Biztosítja-e ezt a módszer?

Megjegyzések a fejezethez

Elaydi [4], Flajolet és Sedgewick [18], Greene és Knuth [7], valamint Mickens [16] könyve részletesen tárgyalja a rekurzív egyenletek megoldását.

Vannak a generátorfüggvényekkel foglalkozó, magyar nyelvű könyvek is – például Knuth [10], valamint Graham, Knuth és Patashnik [6]. Vilenkin műve [19] egyszerű módon tárgyal sok-sok feladatot – a könyv utolsó két fejezete rekurzív egyenletekkel és generátorfüggvényekkel foglalkozik.

Lovász [14] kombinatorikai problémákat és feladatokat tartalmazó könyvében is vannak generátorfüggvényekre vonatkozó feladatok.

A bináris fák megszámolása Knuth [10] könyvéből, a levelek megszámolása a bináris fák halmazában, valamint az n csúcsú k levelű bináris fák megszámolása Kása Zoltán [9] könyvéből valók.

Irodalomjegyzék

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, 1974. Magyarul: *Számítógép-algoritmusok tervezése és analízise*. Műszaki Könyvkiadó, 1982. 5

[2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press/McGraw-Hill, 1990 (Magyarul: *Algoritmusok*. Műszaki Kiadó, 2003, negyedik kiadás). 5

[3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press/McGraw-Hill, 2004 (Második kiadás ötödik, javított utánnyomása. Magyarul: *Új algoritmusok*. Scolar Kiadó, 2003). 5

[4] S. N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag, 1999 (2. kiadás). 35

[5] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979. 6

[6] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1994 (2. kiadás. Magyarul: *Konkrét matematika*, Műszaki Könyvkiadó, 1998). 35

[7] D. H. Greene, D. E. Knuth. *Mathematics for the Analysis of Algorithms*. Birkhäuser, 3. kiadás, 1990. 35

[8] A. Iványi. *Párhuzamos algoritmusok* (*Parallel Algorithms*). ELTE Eötvös Kiadó, 2003. 5

[9] Z. Kása. *Combinatorică cu aplicaţii* (*Combinatorics with Applications*). Presa Universitară Clujeană, 2003. 35

[10] D. E. Knuth. *Fundamental Algorithms*, *The Art of Computer Programming* 1. kötete. Addison-Wesley, 1968 (3., javított kiadás 1997. Magyarul: *A számítógép-programozás művészete. 1. kötet. Alapvető algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, 1993, 2. kiadás.). 5, 35

[11] D. E. Knuth. *Seminumerical Algorithms*, *The Art of Computer Programming* 2. kötete. Addison-Wesley, 1969 (3. javított kiadás 1998. Magyarul: *A számítógép-programozás művészete. 2. kötet. Szeminumerikus algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, 1993, 2. kiadás.). 5

[12] D. E. Knuth. *Sorting and Searching*, *The Art of Computer Programming* 3. kötete. Addison-Wesley, 1973 (3., javított kiadás 1997. Magyarul: *A számítógép-programozás művészete. 3. kötet. Keresés és rendezés*, Műszaki Könyvkiadó, 1994, 2. kiadás.). 5

[13] L. Lovász, P. Gács. *Algoritmusok* (*Algorithms*). Műszaki Könyvkiadó és Tankönyvkiadó, 1978 és 1987. 5

[14] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. Akadémiai Kiadó, 1979 (Magyarul: *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex, 1999). 35

[15] N. A. Lynch. *Distributed Algorithms*. Morgan Kaufman Publisher, 2001 (Ötödik kiadás. Magyarul: *Osztott algoritmusok*. Kiskapu Kiadó, 2002). 5

[16] R. E. Mickens. *Difference Equations. Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold, 1990. 35

[17] L. Rónyai, G. Ivanyos, R. Szabó. *Algoritmusok* (*Algorithms*). Typotex, 1999. 5

[18] R. Sedgewick, P. Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, 1996. 35

[19] N. J. Vilenkin. *Kombinatorika (oroszul)*. Mir, 1969 (Angolul: *Combinatorial Mathematics*, Mir, 1972; magyarul: *Kombinatorika*, Műszaki Könyvkiadó, 1987, 2. kiadás). 35

Tárgymutató

Névmutató

Megoldások

1.1-1. megoldása. A homogén

$$H_n - 2H_{n-1} = 0$$

egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r - 2 = 0\,,$$

ezért általános megoldása az 1.2. tétel szerint $H_n^{(0)} = C_1 2^n$. Az inhomogén egyenlet szabad tagja 1, ezért a partikuláris megoldás C_2 alakú. Ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve $C_2 = -1$ adódik, tehát $H_n^{(1)} = -1$.
Az általános megoldás ezért $H_n = C_1 2^n - 1$ alakú. Mivel $H_0 = 0$, $C_1 = 1$ következik, innen pedig $H_n = 2^n - 1$.
1.1-2. megoldása. Egy korongot csak a B rúd segítségével tudunk a helyére rakni, ezért $M_1 \geq 2$. Mivel a korongot két lépésben a helyére tudjuk tenni, ezért $M_1 = 2$.

Ha $n + 1$ korongunk van, akkor a legnagyobbhoz csak úgy férünk hozzá, hogy előzőleg M_n lépésben a többi korongot átraktuk a C rúdra. Most egy lépés kell a legnagyobb korongnak a B rúdra rakásához, újabb M_n lépés a többi korongnak C-ről A-ra való átrakásához. Ezután még legalább egy lépés kell a legnagyobb korong, és M_n lépés a többi korong C-re való átrakásához. Így azt kapjuk, hogy $M_{n+1} = 3M_n + 2$, ha $n \geq 1$.

A megfelelő karakterisztikus egyenlet alakja $r - 3 = 0$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $M_n^{(0)} = C_1 3^{n-1}$. Mivel az inhomogén egyenlet szabad tagja 2, ezért az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása – az 1.1. ábra szerint – $M_n^{(1)} = C_2$. Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $C_2 = -1$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $M_n = C_1 3^{n-1} - 1$. Az $M_1 = 2$ kezdeti feltétel alapján a feladat megoldása $M_n = 3^{n-1} - 1$.
1.1-3. megoldása. Az egyenlet nem állandó együtthatós, tehát nem alkalmazhatjuk a módszerünket. De ha felírjuk

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$$

alakban, majd behelyettesítjük C_{n-1}-et és így tovább, azt kapjuk, hogy

$$C_n = \frac{2^n(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(n+1)n\ldots 2} = \frac{2^n(2n)!}{2^n(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

1.1-4. megoldása. A homogén egyenlet általános megoldása $x_n^{(0)} = C_1 2^n$. Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x_n^{(1)} = C_2 n 2^n + C_3$ alakban. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $2 - C_3 = (1 - C_2)2^n$, amely minden n-re igaz, ha $x_n^{(1)} = C_2 n 2^n + C_3$ gyök.

Tehát $C_2 = 1$ és $C_3 = 2$. Így az általános megoldás $x_n = C_1 2^n + n2^n + 2$, de mivel $x_1 = 0$, a megoldás $x_n = (n-2)2^n + 2$.

1.2-1. megoldása. Legyen ez a szám a_n. Ekkor $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ és

$$a_n = b_1 b_{n-2} + b_2 b_{n-3} + \cdots + b_{n-2} b_1$$

ahol b_k a k csúcsú bináris fák számát jelenti.

Innen

$$A(z) - 1 - z = z(B(z) - 1)^2 ,$$

ahonnan

$$a_n = \frac{2(n-2)}{n(n+1)} \binom{2n-2}{n-1} .$$

De megkaphatjuk egyszerűbben is: $a_n = b_n - 2b_{n-1}$, hiszen ha hiányzik egy fából a bal oldali részfa, akkor a gyökeret elhagyva egy $n-1$ pontú bináris fát kapunk. Mivel mind a bal, mind a jobb részfa hiányozhat, kétszer kell levonni ezek számát az összes bináris fa számából.

1.2-2. megoldása. Legyen ez a szám c_n és $C(z)$ a megfelelő generátorfüggvény. Ekkor

$$c_n = c_1 c_{n-2} + c_2 c_{n-3} + \cdots + c_{n-2} c_1 .$$

Innen

$$C(z) - 1 - z = z\big(C(z) - 1\big)^2 ,$$

ahonnan

$$C(z) = \frac{1 + 2z - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z} .$$

Ezt sorba fejtve azt kapjuk, hogy

$$C(z) = 1 + \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^{2n+1},$$

ahonnan

$$c_{2n} = 0, \qquad \text{ha } n \ge 1$$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad \text{ha } n \ge 0 .$$

1.2-3. megoldása. Legyen $H(z) = \sum_{n \ge 0} H_n z^n$. Beszorozzuk z^n-nel az egyenlet mindkét oldalát, és összegezzük 1-től.

$$\sum_{n \ge 1} H_n z^n = 2 \sum_{n \ge 1} H_{n-1} z^n + \sum_{n \ge 1} z^n .$$

Innen

$$H(z) = 2zH(z) + \left(\frac{1}{1-z} - 1 \right) .$$

Ahonnan

$$H(z) = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n \ge 0} 2^n z^n - \sum_{n \ge 0} z^n .$$

Innen pedig

$$H_n = 2^n - 1 \ .$$

1.2-4. megoldása. Beszorozzuk z^n-nel az egyenlet mindkét oldalát, majd összegezzük.

$$\frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0} F_{n+2}z^{n+2} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}z^{n+1} + \sum_{n\geq 0} F_n z^n + \sum_{n\geq 0} z^n \ .$$

Ha $\sum_{n\geq 0} F_n z^n = F(z)$, akkor

$$\frac{1}{z^2}\big(F(z) - z\big) = \frac{1}{z}F(z) + F(z) + \frac{1}{1-z} \ .$$

Innen behelyettesítés és számítások után

$$F(1/z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2-z-1)} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)} \ ,$$

ahol

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

Ekkor

$$C_1(n) = \lim_{z\to 1}\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$C_2(n) = \lim_{z\to \alpha}\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-\beta)} = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-1)(\alpha-\beta)} \ ,$$

$$C_3(n) = \lim_{z\to \beta}\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-\alpha)} = \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-1)(\beta-\alpha)} \ .$$

A számítások elvégzése után

$$F_n = C_1(n) + C_2(n) + C_3(n) = -1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{5+3\sqrt{5}}{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \ .$$

1.2-5. megoldása. Legyen $U(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$ és $V(z) = \sum_{n\geq 0} v_n z^n$. Mindkét egyenletet z^n-nel szorozva, majd összegezve, a következőket kapjuk:

$$(1-z^2)U(z) - zV(z) = 1 + z \ ,$$

$$V(z) = (1+z)U(z).$$

Innen

$$U(z) = \frac{1}{1-2z} \ ,$$

$$V(z) = (1+z)U(z) = \frac{1=z}{1-2z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-2z}.$$

Az elsőből $u_n = 2^n$ adódik. A másodikból sorba fejtés után azt kapjuk, hogy $v_0 = 1$ és $v_n = 3\cdot 2^{n-1}$, ha $n \geq 1$.

1.3-1. megoldása. Ha csak az algoritmusban ténylegesen jelen levő műveleteket vesszük figyelembe (tehát eltekintünk a ciklusváltozó és a függvényérték kiszámításától), akkor a műveletek száma a következő:

$+$	$(n-k+1)(k-1)$
$-$	$n-k+1$
$*$	$(n-k+1)k$
$/$	$n-k+1$
$\leftarrow$	$(2n-2k+1)k$

Esetünkben $n = 1000$, $k = 4$, ezért 2991 összeadást, 997 kivonást, 3988 szorzást, 997 osztást és 7972 értékadást kapunk eredményül.

1-1. megoldása. Az (1.2) egyenletből, az 1.2.2. pontban alkalmazott eljárással eljutunk a következőhöz:

$$a_0X(z) + \frac{a_1}{z}\Big(X(z) - x_0\Big) + \cdots + \frac{a_k}{z^k}\Big(X(z) - x_0 - x_1z - \cdots - x_{k-1}z^{k-1}\Big) = 0 \ .$$

Majd átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$X(z)\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_k}{z^k}\right) = \frac{a_1}{z}x_0 + \cdots + \frac{a_k}{z^k}(x_0 + x_1z + \cdots + x_{k-1}z^{k-1}) \ .$$

Erre csak akkor nem alkalmazható a módszer, ha a jobb oldal azonosan nulla. A jobb oldalt z^k-nal szorozva, majd átalakítva, a következőt kapjuk:

$$z^{k-1}(a_1x_0 + a_2x_1 + \cdots + a_kx_{k-1}) + z^{k-2}(a_2x_0 + a_3x_1 + \cdots + a_kx_{k-3})$$
$$+ \cdots + z^2(a_{k-2}x_0 + a_{k-1}x_1 + a_kx_2) + z(a_{k-1}x_0 + a_kx_1) + a_kx_0 \ .$$

Az a_k sohasem lehet egyenlő nullával. Ezért a kifejezés csak akkor lehet azonosan nulla, ha $x_0 = 0, x_1 = 0, \ldots, x_{k-1} = 0$, ebből pedig azonnal következik, hogy ekkor $x_n = 0$ minden n-re.

1-2. megoldása. Az egyenlet megoldását ugyanúgy végezzük, mint a valós számok esetében. Az a kérdés, hogy a megoldás valós lesz-e vagy komplex. Mivel a komplex gyökök mindig párosával jelennek meg (egy komplex szám és a konjugáltja), a C_i-k is párosával fognak megjelenni, mindegyik komplex számnak meglesz a konjugált párja, ezért összegzéskor a tisztán képzetes részek kiesnek, tehát az eredmény mindig valós lesz.

Tartalomjegyzék