

Algoritmusok bonyolultsága

Összefoglalás

- Michael R. Garey, David S. Johnson: *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co. 1979.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. R. Rivest, X. Stein: *Új algoritmusok*, Scolar Kiadó, Budapest, 2003.

$$f, g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^+$$

Ha létezik egy $C > 0$ valós szám és egy n_0 természetes szám úgy, hogy

$$f(n) \leq Cg(n) \quad \text{ha } n \geq n_0,$$

akkor az f függvény *rendje* kisebb vagy egyenlő, mint a g rendje, és ezt így írjuk: $f(n) = O(g(n))$.

Ha $f(n) = O(g(n))$ és $g(n) = O(f(n))$, akkor az f és g függvények azonos rendűek, és ennek jelölése: $f(n) = \Theta(g(n))$.

Ha $f(n) = O(g(n))$ akkor $g(n) = \Omega(f(n))$.

$$n^2 = O(n^3), \quad \text{de} \quad n^3 \neq O(n^2)$$

$$n + 4 = O(n^2 + n + 3), \quad n + 4 = O(n + 3), \quad n + 4 = \Theta(n + 3)$$

$$n = O(n^2 + n + 3), \quad n^2 = O(n^2 + n + 3) \quad \text{és} \quad n^2 = \Theta(n^2 + n + 3)$$

$$n^2 = \Omega(n + 3)$$

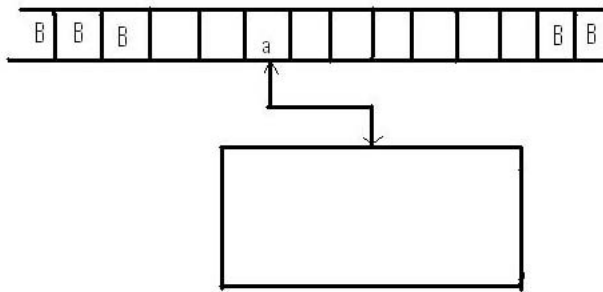
$$\log n = O(n)$$

$O(2^n)$ nem sokat mond, nem érdemes használni

$\Omega(2^n)$ biztos, hogy nem polinomiális

bonyolultság:

- időbonyolultság
- tárbonyolultság



Turing-gép



Alan Turing
(1912–1954)

n -elemű lista esetében a szekvenciális keresés bonyolultsága $O(n)$

SZEKVENCIÁLIS_KERESÉS(A, x)

1. $j := \text{hossz}[A]$
2. **while** ($j > 0$) és ($A_j \neq x$)
3. **do** $j := j - 1$
4. **return** j

bináris keresés

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n, \quad x$$

BINÁRIS_KERESÉS(A, x)

```
1.  $i := 1, j := \text{hossz}[A]$ 
2. while  $i \leq j$ 
3.     do  $k := \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor$ 
4.         if  $x = A_k$ 
5.             then return  $k$ 
6.         if  $x < A_k$ 
7.             then  $j := k - 1$ 
8.             else  $i := k + 1$ 
9. return 0
```

$$\begin{cases} W(n) = 1 + W\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), & \text{ha } n > 1, \\ W(1) = 1. \end{cases}$$

megoldása: $W(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$, ha $n \geq 1$.

Itt a **log** kettes alapú logaritmust jelent.

MÁTRIX_SZORZAT(A, B)

1. **for** $i := 1$ **to** $sorszám[A]$
2. **do for** $j := 1$ **to** $oszlopszám[B]$
3. **do** $C_{ij} := 0$
4. **for** $k := 1$ **to** $oszlopszám[A]$
5. **do** $C_{ij} := C_{ij} + A_{ik} B_{kj}$
6. **return** C

Ha $sorszám[A] = oszlopszám[A] = oszlopszám[B] = n$, akkor $W(n) = n^3$
(alpművelet a szorzás).

Összeadások száma: n^2 .

Lehet-e kevesebb szorzással?

Strassen, 1969

- polinomiális feladatok

$\mathcal{P}$ osztály: polinomiális feladatok (problémák) osztálya
létezik polinomiális algoritmus a feladat megoldására

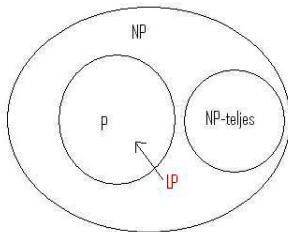
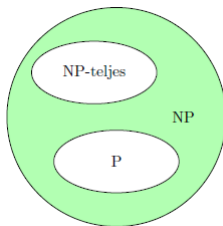
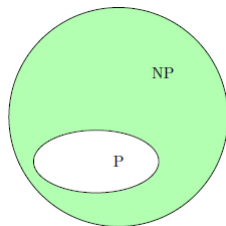
$\mathcal{NP}$ osztály: nemdeterminisztikusan polinomiális feladatok osztálya

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$$

$\mathcal{NP}$ -teljes feladatok: lehető legnehezebbek

Ha egyszer egy $\mathcal{NP}$ -teljes feladatról kiderül, hogy polinomiális, akkor $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

- polinomiális feladatok ($\mathcal{P}$)
- nemdeterminisztikusan polinomiális feladatok ($\mathcal{NP}$)



$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ vagy $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?

LP lineáris programozási feladat

Dantzig 1945, Kacsiján (Khachiyan) 1979, Karmarkar 1984

A feladat matematikai modellje a következő:

$$x+y \rightarrow \max$$

$$3x+4y \leq 220$$

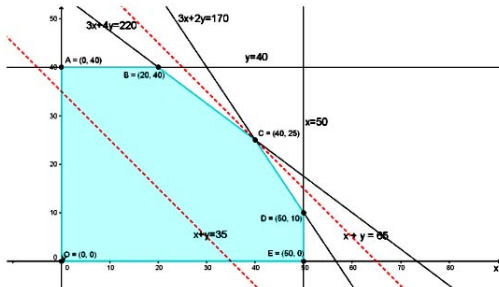
$$3x+2y \leq 170$$

$$2x \leq 100$$

$$y \leq 40$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ábrázoljuk síkbeli koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, melyek mind a hat feltételnek eleget tesznek! Például a $3x+4y \leq 220$ egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok a $3x+4y=220$ egyenes "alatt" helyezkednek el, az $y \geq 0$ feltételnek pedig az x tengely feletti pontok tesznek eleget. Az alábbi ábrán besatírozott terület azt a K halmazt jelöli, amelynek pontjai az összes egyenlőtlenségnek eleget tesznek, ezek közül a pontok közül kell azt megkeresnünk, amelyekre a koordináták összege maximális.



2. Feladat: Szendvicskészítés. Kétfajta szendvicset készítünk, sajtosat és szalámisat.

A szendvicsok összetétele szigorúan elő van írva, és ismert, hogy egy szendvics eladásával mennyi profitra lehet szert tenni. A feladat: a maximális összprofitot biztosító termékösszetétel meghatározása a rendelkezésre álló készletek figyelembevételével.

	1.sajtos	2.szalámis	Készlet
Kenyérszelet	1	2	80
Szalámi szelet	3	2	120
Sajtszelet	2	0	60
Egy szendvics profit tartalmaz	60 Ft	80 Ft	-

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\2x_1 &\leq 60 \\x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\60x_1 + 80x_2 &\rightarrow \max\end{aligned}$$

Forrás: internet

$\mathcal{NP}$ -teljes feladatok:

- logikai formulák kielégíthetősége
- hátizsák probléma
- csomagolási probléma (bin packing)
- Hamilton-út keresése
- lefedőszó probléma

- alsó korlát rendezési algoritmusoknál
- gráfelméleti algoritmusok
 - legrövidebb utak
 - magyar módszer maximális párosításra
 - folyamfeladatok
 - Hamilton-utak (közelítő algoritmusok)
- vektorok, mátrixok, polinomok
- NP-teljes feladatok, közelítő módszerek
- az első NP-teljes feladat (SAT)

A $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ nyelv **polinomiálisan átalakítható** az $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ nyelvvé, ha létezik egy $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ függvény, amelyre a következő két feltétel teljesül:

1. Létezik egy polinomiális idejű DTM program, amely kiszámítja az f függvényt.
2. Minden $x \in \Sigma_1^*$ -re $x \in L_1$ akkor és csakis akkor, ha $f(x) \in L_2$.

Jelölése: $L_1 \propto L_2$.

Egy L nyelv NP-teljes, ha $L \in \text{NP}$ és minden $L' \in \text{NP}$ -re $L' \propto L$.

Egy Π döntési feladat NP-teljes, ha $\Pi \in \text{NP}$ és minden $\Pi' \in \text{NP}$ -re $\Pi' \propto \Pi$.

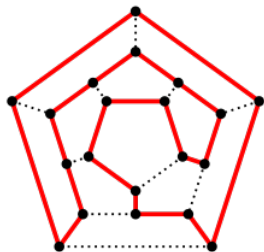
Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy egy Π döntési feladat NP-teljes a következőket kell bizonyítani:

1. $\Pi \in \text{NP}$, és
2. létezik egy NP-teljes Π' feladat úgy, hogy $\Pi' \propto \Pi$.

Utazóügynök

ÁLTALÁNOS ESET: Adott n város: $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $n \geq 1$; minden várospárra egy $d(c_i, c_j) \in \mathbf{Z}^+$ távolság, és egy $B \in \mathbf{Z}^+$ korlát.

KÉRDÉS: Be lehet-e járni a városokat B -nél nem hosszabb körúttal?



Hamilton-kör

ÁLTALÁNOS ESET: Adott egy $G = (V, E)$ gráf.

KÉRDÉS: Létezik-e G -ben Hamilton-kör?

Bebizonyítjuk, hogy $\text{HAMILTON-KÖR} \propto \text{UTAZÓÜGYNÖK}$.

Ehhez definiálni kell egy f függvényt, amely a HAMILTON-KÖR minden esetéhez hozzárendeli az UTAZÓÜGYNÖK egy esetét.

Ha $|V| = n$, legyen adott egy Hamilton-kör a G gráfban. Ugyanezek a csúcsok lesznek az UTAZÓÜGYNÖK feladat csúcsai. Definiáljuk a távolságot: $d(v_i, v_j) = 1$ ha $(v_i, v_j) \in E$ és 2 különben. Legyen $B = n$.

Könnyű belátni, hogy ez az átalakítás polinomiális. A második követelmény: egy Hamilton-kör egyben egy megfelelő bejárás és fordítva.