Algoritmusok bonyolultsága

4. előadás

http://www.ms.sapientia.ro/~kasa/komplex.htm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1$$
$$A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

x hatványainak kiszámításával:

POLINOM(A, x)
1. $p := a_0 + a_1 \cdot x$
2. $y := x$
3. for $j := 2, 3, \ldots, n$
4. do $y := y \cdot x$
5. $p := p + a_i \cdot y$
6. return p

Szorzások száma: $1 + 2(n-1) = 2n - 1$
Összeadások száma: $1 + (n-1) = n$

Horner-séma polinom értékének kiszámítására

Példa:

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$

	1	2	-3	2
$x = 3$	1	5	12	38

$$p(x) = \Big(\ldots ((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1 \Big) x + a_0$$

HORNER(A, x)

1. $p := a_n$
2. for $j := n-1, n-2, \ldots, 0$
3. do $p := p \cdot x + a_j$
4. return p

Szorzások és összeadások száma egyaránt n.
Be lehet bizonyítani, hogy a Horner-séma optimális.

Előszámításos polinomkiértékelés

Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1$, és $n = 2^k - 1$, ha $k \geq 1$.
Legyen p főpolinom (azaz $a_n = 1$). Ekkor

$$p(x) = (x^j + b) \cdot q(x) + r(x)$$

ahol q és r mindegyike 2^{k-1}–1 fokú polinomok.

$p(x)$ KISZÁMÍTÁSA
1. Számítsuk ki a $q(x)$ és $r(x)$ értékeket!
2. Számítsuk ki az x^j értékét!
3. Számítsuk ki: $(x^j + b) \cdot q(x) + r(x)$

$j = 2^k - 1 - (2^{k-1} - 1) = 2^{k-1}$.

$q(x)$ és $r(x)$ hasonlóan számítható ki.

$$n = 2^k - 1, \quad 2^{k-1} - 1 = \frac{n-1}{2}, \quad 2^{k-1} = \frac{n+1}{2}$$

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = x^{\frac{n-1}{2}} + a_{n-1} x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} \qquad \text{alakban keressük}$$

$$j = 2^{k-1} = \frac{n+1}{2}$$

Innen

$$r(x) = p(x) - \left(x^{\frac{n+1}{2}} + b\right) q(x) =$$

$$= \left(a_{\frac{n-1}{2}} - b\right) x^{\frac{n-1}{2}} + \left(a_{\frac{n-3}{2}} - b a_{n-1}\right) x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + \left(a_0 - b a_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$a_{\frac{n-1}{2}} - b = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = a_{\frac{n-1}{2}} - 1$$

Példa

$$p(x) = x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$n = 7 \qquad x^{\frac{n+1}{2}} + \left(a_{\frac{n-1}{2}} - 1\right) = x^4 + 3$$

Ekkor, egyszerű számítással

$$q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 3, \quad r(x) = x^3 - 7x^2 - 3x - 8$$

Alkalmazva a módszert mindkét polinomra, azt kapjuk, hogy:

$$q(x) = (x^2-4)(x+3)+(x+15), \quad r(x) = (x^2-4)(x-7)+(x-36)$$

Tehát:

$$p(x) = (x^4+3)\Big[(x^2-4)(x+3)+(x+15)\Big]+\Big[(x^2-4)(x-7)+(x-36)\Big]$$

szorzások száma: 5 (Hornernél 7)
összeadások száma 10 (Hornernél 7)

$p(x)$ KISZÁMÍTÁSA

1. Kiszámítjuk a $q(x)$ és $r(x)$ értékeket rekurzívan.
2. Kiszámítjuk az $x^2, x^4, x^8 \ldots, x^{\frac{n+1}{2}}$ értékeket.
3. Kiszámítjuk: $(x^{\frac{n+1}{2}} + b) \cdot q(x) + r(x)$

$M(k)$ a $2^k - 1$ fokú főpolinom kiértékeléséhez szükséges szorzások száma (nem számítva ax x^2, x^4 stb. hatványokat)
$A(k)$ az összeadások száma

Ekkor:

$M(1) = 0$
$M(k) = 2M(k-1) + 1, \text{ ha } k > 1$

$A(1) = 1$
$A(k) = 2A(k-1) + 2, \text{ ha } k > 1$

Rekurzívan kifejtve:

$$M(k) = 2^{k-1} - 1$$

Hozzáadva a hatványokat is, a szorzások száma $2^{k-1} - 1 + (k - 1)$,
azaz $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \log(n+1) - 2$, vagyis
a szorzások száma kb. $\dfrac{n}{2} + \log n$

Az összeadások száma: $\dfrac{3n-1}{2}$

Vektorok és mátrixok szorzása előszámítással

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ha valamelyik vektort előre ismerjük, lehet csökkenteni a szorzások számát.

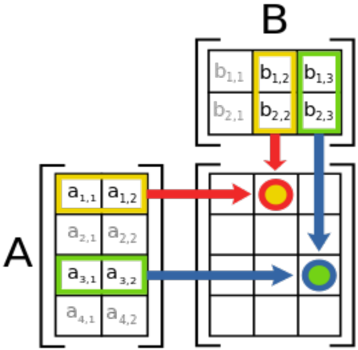
Alapötlet:
$n = 4$-re:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \\ &= (x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + (x_3 + y_4)(x_4 + y_3) - x_1 x_2 - x_3 x_4 - y_1 y_2 - y_3 y_4 \end{aligned}$$

Ha $n = 2p$:

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{p} (x_{2i-1} + y_{2i})(x_{2i} + y_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{p} x_{2i-1} x_{2i} - \sum_{i=1}^{p} y_{2i-1} y_{2i}$$

Klasszikus mátrixszorzás illusztrálása



(Wikipédia)

Négyzetes mátrixok esetében:

szorzások száma n^3,

összeadások száma $n^3 - n^2$.

A sorok és oszlopok szorzásánál használjuk az előszámítást.
A $m \times n$, B pedig $n \times q$ típusú mátrixok.

WINOGRAD(A, B, m, n, q)

1. $p := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
2. **for** $i := 1$ **to** m // A sorainak előszámítása
3. **do** $S_i := \sum_{j=1}^{p} a_{i,2j-1} \cdot a_{i,2j}$
4. **for** $i := 1$ **to** q // B oszlopainak előszámítása
5. **do** $O_i := \sum_{j=1}^{p} b_{2j-1,i} \cdot b_{2j,i}$
6 **for** $i := 1$ **to** m // C elemeinek kiszámítása
7. **do for** $j := 1$ **to** q
8. $c_{ij} := \sum_{k=1}^{p} (a_{i,2k-1} + b_{2k,j})(a_{i,2k} + b_{2k-1,j}) - S_i - O_j$

9. **if** n páratlan
10.   **then for** $i := 1$ **to** m
11.   **for** $j := 1$ **to** q
12. $c_{ij} := c_{ij} + a_{in}b_{nj}$
13. **return** C

Elemzés

Legyen n páros

A szorzások száma:

- 2. lépésben: mp
- 3. lépésben: qp
- 4. lépésben: mqp összesen: $\frac{n}{2}(m + q + mq)$

Ha $m = n = q$, akkor a szorzások száma: $\frac{n}{2}(2n + n^2) = \frac{n^3}{2} + n^2$,
n^3 helyett.

Az összeadások száma:

2. lépésben: $m(p-1)$
3. lépésben: $q(p-1)$
4. lépésben: $mq\big(2p+(p-1)+2\big)$

Ha $m=n=q$, akkor összesen: $\frac{3}{2}n^3+3n^2-2n$,
n^3-n^2 helyett.

Az elemek indexelése is bonyolultabb, mint a klasszikus algoritmusnál.

Strassen módszere mátrixszorzásra – Volker Strassen (1936–)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$ 8 szorzás, 4 összeadás

Általában (négyzetes mátrixoknál): n^3 és $n^3 - n^2$.

Strassen ötlete (1969):

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & x_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ x_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & x_6 &= (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12}) \\ x_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & x_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \\ x_4 &= a_{22}(b_{21} - b_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= x_1 + x_4 - x_5 + x_7 & c_{12} &= x_3 + x_5 \\ c_{21} &= x_2 + x_4 & c_{22} &= x_1 + x_3 - x_2 + x_6 \end{aligned}$$

7 szorzás, 18 összeadás

Legyen $n = 2^k$, $M(k)$ a szorzások száma, $A(k)$ az öszeadások száma. Felosztjuk a mátrixokat $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ mátrixokra, és alkalmazzuk Strassen módszerét ezen mátrixok szorzására is.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

$M(0) = 1$
$M(k) = 7M(k-1)$, ha $k > 0$

$A(0) = 0$
$A(k) = 18(2^{k-1})^2 + 7A(k-1)$, ha $k > 0$

$M(k) = 7^k = 7^{\log n} = n^{\log 7}$

$A(k) = 6 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$

$M(k) \approx n^{2.81}$

$A(k) \approx 6n^{2.81} - 6n^2$

Ha n nem kettőhatvány, akkor $2^k m \times 2^k m$ alakú mátrixokkal dolgozunk, ahol $k = \lfloor \log n - 4 \rfloor$ és $m = \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor + 1$.

Javítások – újabb algoritmusok

Coppersmith–Winograd algoritmus, 1990

Don Coppersmith (1950–), Shmuel Winograd (1936–2019)

szorzások száma $\approx n^{2.37}$

Andrew Stothers 2010-ben javított rajta egy kicsit
($n^{2.3755}$ helyett $n^{2.3727}$)

Polinomok kétféle megadása

a) együtthatókkal: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1$

b) helyettesítési értékekkel (pontreprezentáció):
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

átalakítás:
a) $\Rightarrow$ b): Horner-sémával: $\Theta(n^2)$
b) $\Rightarrow$ a): egyenletrendszer megoldása: $\Theta(n^3)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 & = & y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & & \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 & = & y_n \end{array} \right.$$

$\Rightarrow a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$

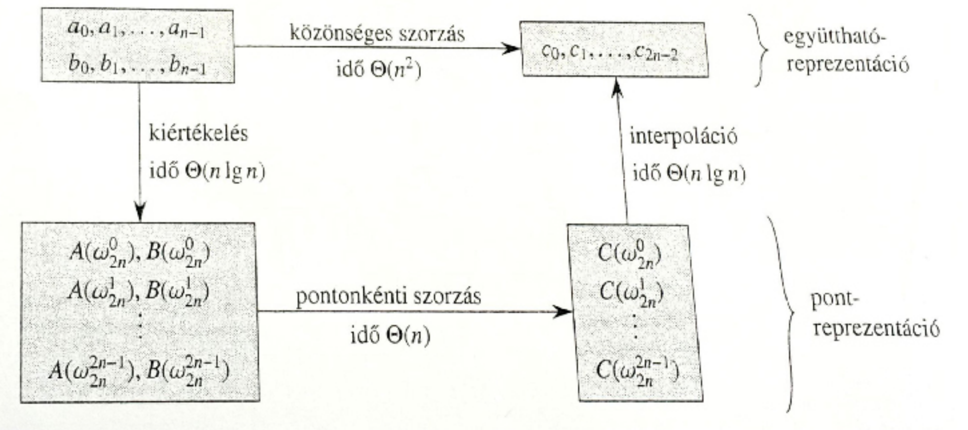
b) $\Rightarrow$ a): interpolációval: $\Theta(n^2)$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod\limits_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq k} (x_k - x_i)} \cdot y_k =$$

$$= \cdots + \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \cdot y_k + \cdots$$

Pontreprezentációnál két polinom összeadása, szorzása lineáris időben elvégezhető.

Polinomok szorzása gyorsabban



Komplex egységgyökök

$x^n = 1$ egyenlet megoldásai a komplex számkörben:

$k = 0, 1, \ldots, n-1$-re
$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ mert $e^{iu} = \cos u + i\sin u$
x_k n-ed rendű egységgyökök

Például: ha $n = 4$, akkor:

$x_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
$x_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
$x_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

Ha ω_n n-ed rendű egységgyök, akkor ω_n^k is az (k természetes szám)

Legyen $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ (vagy csak egyszerűen ω) az alap n-ed rendű egységgyök. Ekkor $1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}$ mind n-ed rendű egységgyök, és csoportot alkot.

Tétel

Tetszőleges $n \geq 0$, $k \geq 0$, $d > 0$ egész számokra

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k.$$

(egyszerűsítési szabály)

Bizonyítás:

$$\omega_{dn}^{dk} = \left(e^{i\frac{2\pi}{dn}}\right)^{dk} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{k} = \omega_n^k.$$

Következmény

Ha $n > 0$ páros, akkor

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1.$$

Bizonyítás:

$$\omega_n^{n/2} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n/2} = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n}{2}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Tétel

Ha $n > 0$ páros szám, akkor az n-ed rendű egységgyökök négyzete megegyezik az $n/2$-ed rendű egységgyökökkel. (felezési szabály)

Bizonyítás:
Az egyszerűsítési szabályból következik, hogy $(\omega_n^k)^2 = \omega_n^{2k} = \omega_{n/2}^k$.
Mindegyik egységgyök kétszer jelenik meg. Mivel (a fenti következmény alapján) $\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$, ezért ω_n^k-val szorozva:

$$\omega_n^{k+n/2} = -\omega_n^k.$$

Innen, négyzetre emelve:

$$\left(\omega_n^{k+n/2}\right)^2 = \left(\omega_n^k\right)^2.$$

A következő polinom értékét szeretnénk kiszámítani a $\omega_n^0, \omega_n^1 \ldots, \omega_n^{n-1}$ helyeken:

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j, \quad x \in \mathbf{C}.$$

Ha az együtthatók $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, és y_k a polinom értéke ω_n^k-ra, akkor

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ekkor az $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ vektort az $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltjának (röviden: DFT) nevezzük.
Feltevés: n 2-nek a hatványa.

Alapötlet:

$$p_{\text{páros}}(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1}$$

$$p_{\text{páratlan}}(x) = a_1 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1}$$

Ekkor

$$p(x) = p_{\text{páros}}(x^2) + x p_{\text{páratlan}}(x^2)$$

Kiszámítjuk a $p_{\text{páros}}$ és $p_{\text{páratlan}}$ polinomok értékét a következőkön:

$$(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2,$$

majd kiszámítjuk a p polinom értékét.

REKURZÍV-FFT(A)

$n := \mathrm{hossz}[A]$ // n kettőhatvány
if $n = 1$
  then return A
$\omega_n := e^{2\pi i/n}$
$\omega := 1$
$A^{[\text{páros}]} := (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
$A^{[\text{páratlan}]} := (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
$Y^{[\text{páros}]}$:= REKURZÍV-FFT($A^{[\text{páros}]}$)
$Y^{[\text{páratlan}]}$:= REKURZÍV-FFT($A^{[\text{páratlan}]}$)
for $k := 0$ **to** $n/2 - 1$
  do $y_k := y_k^{[\text{páros}]} + \omega \cdot y_k^{[\text{páratlan}]}$
    $y_{k+n/2} := y_k^{[\text{páros}]} - \omega \cdot y_k^{[\text{páratlan}]}$
    $\omega := \omega \cdot \omega_n$
return Y oszlopvektornak tekintjük

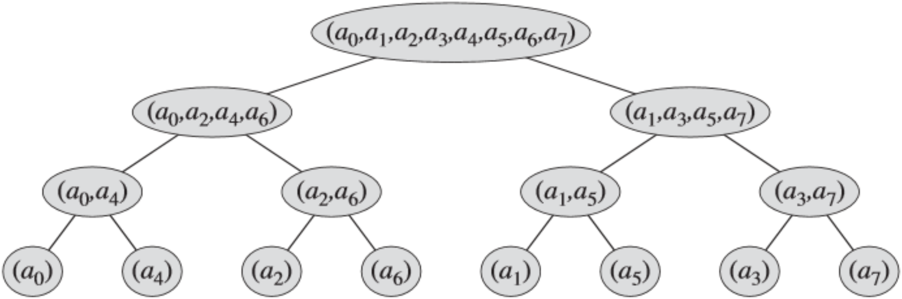
Példa: $n = 4$, az egységgyökök: $1, i, -1, -i$
$p(x) = 2 + x + x^2 + x^3$

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \\ p(i) &= 1 \\ p(-1) &= 1 \\ p(-i) &= 1 \end{aligned}$$

Az algoritmus gyorsítása (a 10-14. sorok átírása):

10. **for** $k := 0$ **to** $n/2 - 1$
11. **do** $t := \omega \cdot y_k^{[\text{páratlan}]}$
12. $y_k := y_k^{[\text{páros}]} + t$
13. $y_{k+n/2} := y_k^{[\text{páros}]} - t$
14. $\omega := \omega \cdot \omega_n$
15. **return** Y

A REKURZÍV-FFT hívása $n = 8$ esetében:



(Cormen–Leiserson–Rivest–Stein)

A levelekben lévő elemek indexei: 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.
Ezek binárisan:
000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111
fordítva írva a biteket:
000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
éppen az elemek eredeti sorrendje jelenik meg.

Iteratív megoldás

Őrizzük meg a leveleket ebben a sorrendben egy $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ vektorban. Pl. $X = (a_0, a_4, a_2, a_6, a_1, a_5, a_3, a_7)$.
Ezt a BIT-FORDÍTÓ-MÁSOLÓ eljárás oldja meg.
(k) a binárisan fordítva felírt k természetes szám tízes számrendszerbeli értéke, tehát pl. (6) = 3 (mivel 110 fordítottja 011, és ez 3 a tízes számrendszerben)

BIT-FORDÍTÓ-MÁSOLÓ(A)

```
n := hossz[A]
for k := 0 to n − 1
    do x_(k) := a_k
return X
```

ITERATÍV-FFT(A)

```
BIT-FORDÍTÓ-MÁSOLÓ(A)
n := hossz[A]        // n kettőhatvány
for s := 1 to log n
    do m := 2^s
        ω_m := e^(2πi/m)
        for k := 0 to n − 1 by m
            do ω := 1
                for j := 0 to m/2 − 1
                    t := ω · x_{k+j+m/2}
                    u := x_{k+j}
                    x_{k+j} := u + t
                    x_{k+j+m/2} := u − t
                    ω := ω · ω_m
return X
```

Példa

$n = 4$, az egységgyökök: $1, i, -1, -i$

$p(x) = 2 + x + x^2 + x^3$

$X = (a_0, a_2, a_1, a_3) = (2, 1, 1, 1)$

$s = 1$

$k = 0, j = 0$: $X = (3, 1, 1, 1)$

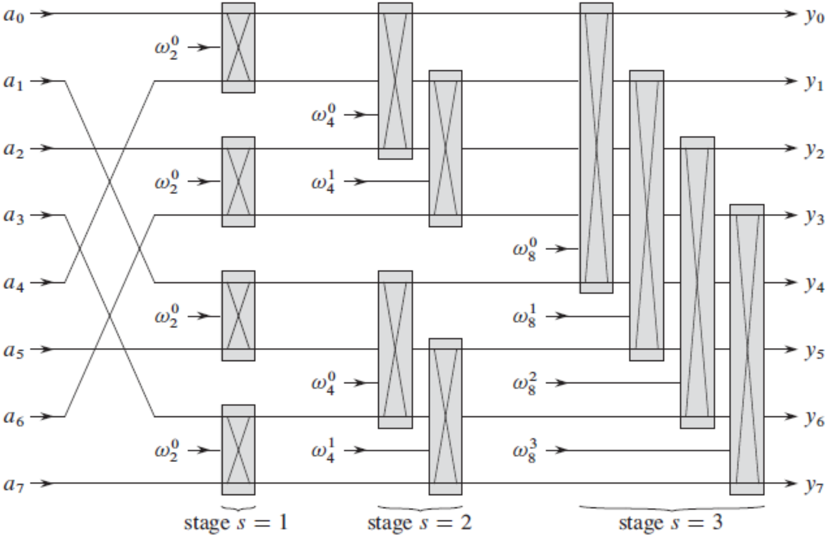
$k = 2, j = 0$: $X = (3, 1, 2, 0)$

$s = 2$

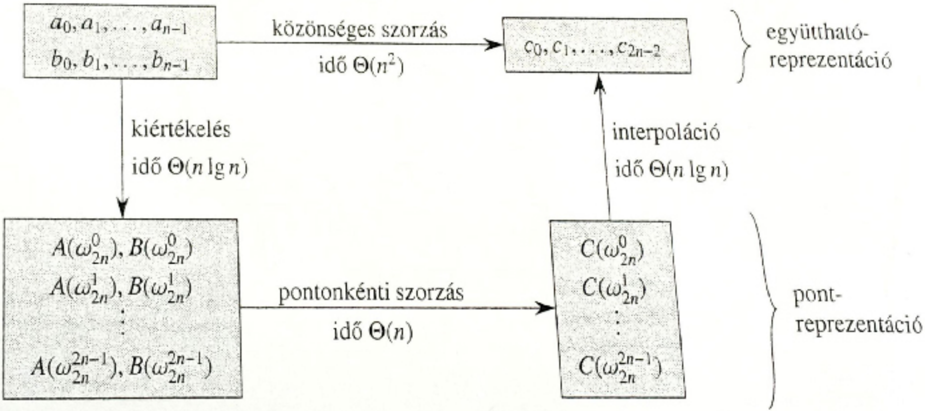
$k = 0, j = 0$: $X = (5, 1, 1, 0)$

$k = 0, j = 1$: $X = (5, 1, 1, 1)$

Párhuzamos megoldás



(Cormen–Leiserson–Rivest–Stein)


$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$
$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$
közönséges szorzás
idő $\Theta(n^2)$
$c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$
együttható-reprezentáció
kiértékelés
idő $\Theta(n \lg n)$
interpoláció
idő $\Theta(n \lg n)$
$A(\omega_{2n}^0), B(\omega_{2n}^0)$
$A(\omega_{2n}^1), B(\omega_{2n}^1)$
$\vdots$
$A(\omega_{2n}^{2n-1}), B(\omega_{2n}^{2n-1})$
pontonkénti szorzás
idő $\Theta(n)$
$C(\omega_{2n}^0)$
$C(\omega_{2n}^1)$
$\vdots$
$C(\omega_{2n}^{2n-1})$
pont-reprezentáció

Példa
Számítsuk ki két elsőfokú polinom szorzatát a DFT algoritmussal.

$n = 2$

$$A(x) = a_0 + a_1 x = 1 + 2x$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x = 2 + x$$

4-edrendű egységgyökök ($x^4 - 1 = 0$ gyökei):

$$\omega_4^0 = 1$$
$$\omega_4^1 = i$$
$$\omega_4^2 = -1$$
$$\omega_4^3 = -i$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 = 2 + x + 0x^2 + 0x^3$$

$$
\begin{array}{llllll}
A(1) & = 2 & B(1) & = 3 & C(1) = A(1)B(1) & = 9 \\
A(i) & = 2i+1 & B(i) & = i+2 & C(i) = A(i)B(i) & = 5i \\
A(-1) & = -1 & B(-1) & =1 & C(-1) = A(-1)B(-1) & = -1 \\
A(-i) & =-2i+1 & B(-i) & =-i+2 & C(-i) = A(-i)B(-i) & =-5i
\end{array}
$$

Meg kell határozni a $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ polinom együtthatóit, ahol $c_3 = 0$.

30.1. tétel (az interpolációs polinom egyértelműsége). *Minden* n *pontból álló* $\{(x_0, y_0),$ $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ *pontrendszerhez, ahol* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *különböző számok, pontosan egy olyan n fokszámkorlátú polinom létezik, amely eleget tesz az* $A(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ *feltételeknek.*

Bizonyítás. Az állítás egy speciális mátrix invertálhatóságából következik. A (30.3) feltétel ekvivalens a következő lineáris egyenletrendszerrel:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{30.4}$$

A (30.4) egyenlet alapján a DFT felírható $y = V_n a$ alakban, ahol V_n az ω_n hatványaiból készített Vandermonde-mátrix:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

A V_n mátrix (k, j) indexű eleme ω_n^{kj} $(j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Maga a V_n egy szorzótáblának is felfogható.

Az inverz művelet eredményét, azaz a V_n mátrix V_n^{-1} inverzének és az y vektornak a szorzatát az $a = \mathrm{DFT}_n^{-1}(y)$ szimbólummal jelöljük.

30.7. tétel. *Tetszőleges $j, k = 0, 1, \ldots, n-1$ számra a V_n^{-1} mátrix (j, k) indexű eleme az ω_n^{-kj}/n komplex számmal egyenlő.*

A mi esetünkben:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 5i \\ -1 \\ -5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5i \\ -1 \\ -5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a eredmény:
$C(x) = 2 + 5x + 2x^2 + 0x^3$

Ellenőrzés:
$C(x) = A(x)B(x) = (1 + 2x)(2 + x) = 2 + 5x + 2x^2$