Robotkarok dinamikus modellje

A robotok dinamikus modellje a robot csuklóinak pozíciója, sebessége, gyorsulása illetve a robotra ható erők között adja meg az összefüggést. A modellezés során feltételezzük, hogy az egymáshoz csatolt robotszegmensek merev testekként modellezhetők. A modellben bemenetként a robot beavatkozói által kifejtett erőket/nyomatékokat ($\boldsymbol{\tau} \in R^n$), kimenetként pedig a robot csuklóinak a lineáris- illetve szögpozícióit ($\boldsymbol{q} \in R^n$) tekintjük. Itt n a robot szabadságfokát jelöli. A fejezet a dinamikus modell meghatározása előtt, áttekinti a mozgástörvényeket valamint azokat az erőket, amelyek felléphetnek a modellben robot szabad mozgása esetében. A robot dinamikus modelljét a robot energiái alapján, az Euler –Lagrange egyenletet felhasználva írjuk fel.

A merev testek mozgása

Egy merev test középpontjának *térbeli mozgását* Newton második törvényének segítségével írhatjuk le*:*

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \sum_k \mathbf{F_k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \tag{1}$$

m a merev test tömege, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ a 3 pozíciókomponens a 3 tengely mentén, $\mathbf{F_k}$ a három tengely mentén ható erők (függhetnek a pozíció- és sebességvektoroktól)

Merev testek *forgómozgását* az Newton-Euler egyenlet segítségével írhatjuk le. A forgómozgás mindig egy tengelyhez képest definiáljuk. Ebben az esetben a test tömege helyett a tehetetlenségi mátrixot kell alkalmazni.
A forgó mozgás dinamikáját egy rögzített tengely körül az alábbi egyenlet írja le:

$$I\dot{\omega} = \sum_k \tau_{\mathbf{k}}(\alpha, \omega) \tag{2}$$

Az egyenletben α jelöli a szögelfordulást, ω a szögsebességet I pedig a skalár tehetetlenségi nyomtatékot.
Konstans sűrűségű merev testek esetében az tehetetlenségi nyomatékot az alábbi formában számíthatjuk:

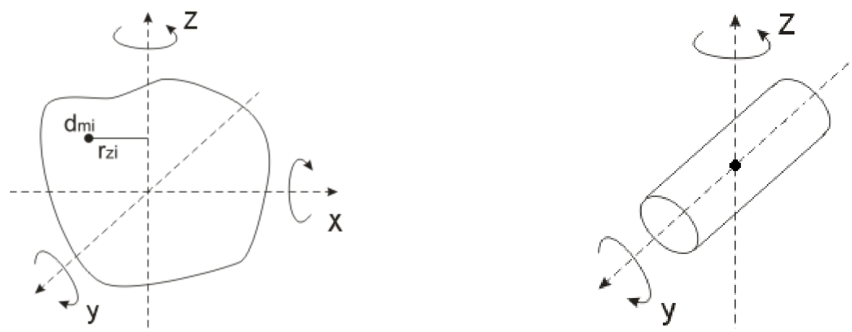
$$I = \int_V r^2 dm \tag{3}$$

Az egyenletben r a dm elemi tömeg távolságát jelöli a forgástengelytől (lásd 1. Ábra). Az integrálást a test teljes V térfogatán végezzük. Amennyiben a vizsgált rendszer N darab m_k tömegű anyagi pontból áll, amelyek r_k távolságra vannak a forgástengelytől, akkor a tehetetlenségi nyomaték

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \tag{4}$$

Az tehetetlenségi nyomaték pozíciófüggő, ezért ha egy robot mozog, a robot szegmensek inerciája minden pillanatban más és más lehet a csuklópozícióktól függően.

Az 1 Ábrán látszik, hogy a különböző forgástengelyek mentén az inercia különböző értéket vehet fel (I_x, I_y, I_z). Például egy rúd másképp ellenszegül a rá ható forgónyomatéknak az *y* - és másképp a *z* tengely mentén.



1. Ábra: Merev testek forgása

Fontos példák:

a) Egy *m* tömegű *anyagi pont* tehetetlenségi nyomatéka, ha a *z* tengelytől *r* távolságra van

$$I_z = m \cdot r^2 \tag{5}$$

b) *Henger* inerciája a hossztengelye mentén

$$I_z = \frac{m \cdot r^2}{2} \tag{6}$$

r a henger sugarát, *m* a tömegét jelöli.

c) *Rúd* inerciája az egyik végén áthaladó, hossztengelyre merőleges tengely mentén

$$I_z = \frac{m \cdot l^2}{3} \tag{7}$$

l a rúd hosszát, *m* a tömegét jelöli.

A szabad mozgást végző robotra ható erők, forgatónyomatékok

I. *A beavatkozók által kifejtett erők/forgónyomatékok*: A robotkarok mozgása esetében az ellenőrzött (az irányítási algoritmus által előírt) erőhatást a beavatkozók által kifejtett erők jelentik. Ennek segítségével kell kompenzáljuk a többi, mozgás közben létrejövő erőhatást úgy, hogy a robot az elvárt módon mozogjon. A robotok csuklóját általában motorokkal vagy hidraulikus, pneumatikus beavatkozókkal szereljük fel. Transzlációs csuklók mozgatásához erőhatásra, rotációs csuklók esetében forgatónyomatékokra van szükség. Forgatónyomatékot erővé illetve erőt forgatónyomatékká megfelelő áttételekkel átalakíthatunk. Az áttételeket a beavatkozó és a robotok szegmense közé szereljük.
A $\boldsymbol{\tau_k}$ forgatónyomaték az erőnek egy adott középpontra való forgatóképessége, egyenlő az erő $\boldsymbol{F_k}$ és a középpontból az erő támadáspontjába tartó pozícióvektor ($\boldsymbol{r_k}$) vektoriális szorzatával ($\tau_k = r_k \times \mathbf{F_k}$).

II. *Centrifugális erő:* forgó testre ható tehetetlenségi erő. Az m tömegű anyagi pontra ható centrifugális erő, amelynek $\boldsymbol{r}$ a forgástengelytől számított helyzetvektora és ω szögsebességgel forog:

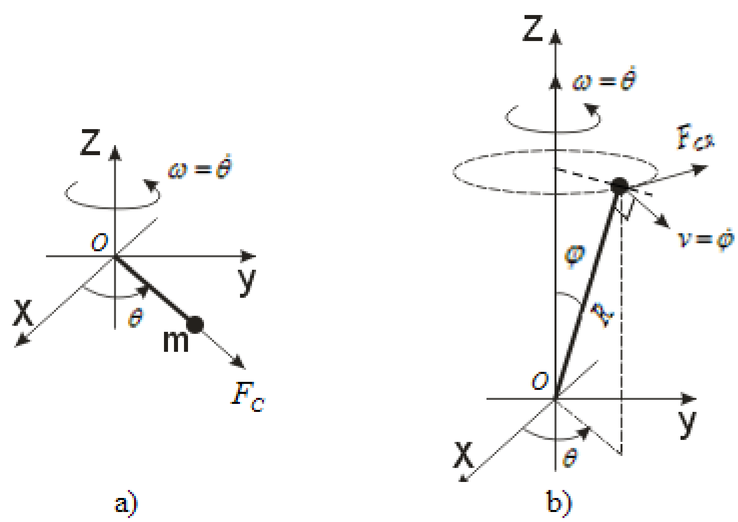
$$\mathbf{F_C} = m\omega^2\mathbf{r} \tag{8}$$

Iránya megegyezik $\boldsymbol{r}$ irányával, lásd a 2.a. Ábrát.

III. *Coriolis erő:* forgó vonatkoztatási rendszerben mozgó testre ható tehetetlenségi erő. Feltételezzük, hogy egy R hosszúságú rúd végén m tömegű anyagi pont van. A rúd egyik vége rögzítve van, a rúd ω szögsebességgel forog (lásd 2.b Ábra). Ugyanakkor a rúd vége v sebességgel mozog (közeledik vagy távolodik a z tengelyhez). Ebben az esetben a Coriolis erő:

$$\mathbf{F_{CR}} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{9}$$

Az ábrán látható példában $F_{CR} = -2m\cdot\omega\cdot v\cdot\cos\varphi = -2m\cdot\dot{\theta}\cdot R\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi$, iránya merőleges az (ω, z) síkra.



2 Ábra: a) centrifugális erő b) Coriolis erő szemléltetése

IV. *Gravitáció:* A Föld felszínén egy m tömegű testre ható gravitációs erő:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} \tag{10}$$

ahol $\boldsymbol{g}$ a gravitációs gyorsulást jelöli, amely mindig a Föld felszíne fele mutat és nagysága $g \approx 9.81$.
Merev test esetében a *gravitáció* a tömegközéppontban hat. Ez merev test esetében mindig egy rögzített pont a testhez képest. Homogén rúd esetében például mindig a rúd geometriai középpontjában van. Általában a tömegközéppont $\boldsymbol{R}$ helyzetvektora:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{r}\,dm \tag{11}$$

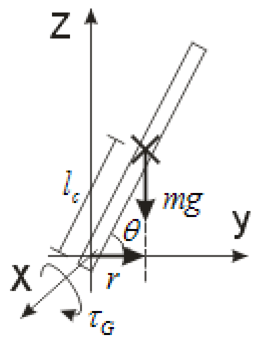
Ez N anyagi pontból álló mechanikai rendszer esetében:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} m_i} \sum_{k=1}^{N} m_i \mathbf{r_i} \qquad (12)$$

Példa: A végén rögzített rúdra a gravitációs erő által kifejtett forgatónyomatékának nagysága (3. Ábra)

$$\tau_G = r \cdot m \cdot g = m \cdot g \cdot l_c \cdot \cos(\theta) \qquad (13)$$

l_c – a rúd tömegközéppontjának távolsága a rögzítési ponttól.



3 Ábra: Gravitáció által kifejtett, a végénél rögzített rúdra ható nyomaték

V. Súrlódási erő: Két érintkező, egymáshoz képest mozgó felület között megjelenő, a mozgásnak ellenszegülő erő. Robotok esetében a súrlódás általában a beavatkozókban, valamint az áttételekben lép fel. Több súrlódási modell létezik:

a) *Coulomb modell* (4.a Ábra): Száraz felületek esetében alkalmazott modell, csak a sebesség előjelétől függ:

$$F_f = F_c \cdot \mathrm{sgn}(v) \qquad (14)$$

$F_C > 0$ a Coulomb súrlódási együttható, amely a felületektől, a felületekre ható nyomóerőtől függ.

b) *Coulomb + viszkózus modell* (4.b Ábra): Nedves felületek esetében, például ha a súrlódó felületek kenőanyaggal (olajjal vagy gépzsírral) vannak kenve, megjelenik egy sebességgel arányos komponens is:

$$F_f = F_c \cdot \mathrm{sgn}(v) + F_v \cdot v \qquad (15)$$

$F_V > 0$ a viszkózus súrlódási együttható, amely az alkalmazott kenőanyagtól függ.

c) *Coulomb + viszkózus + statikus modell* (4.c ábra): A statikus komponens az az erőkomponens, amely ahhoz szükséges, hogy a testet kilehessen mozdítani nyugalmi állapotából. A modellbe az alábbi módon vezethető be:

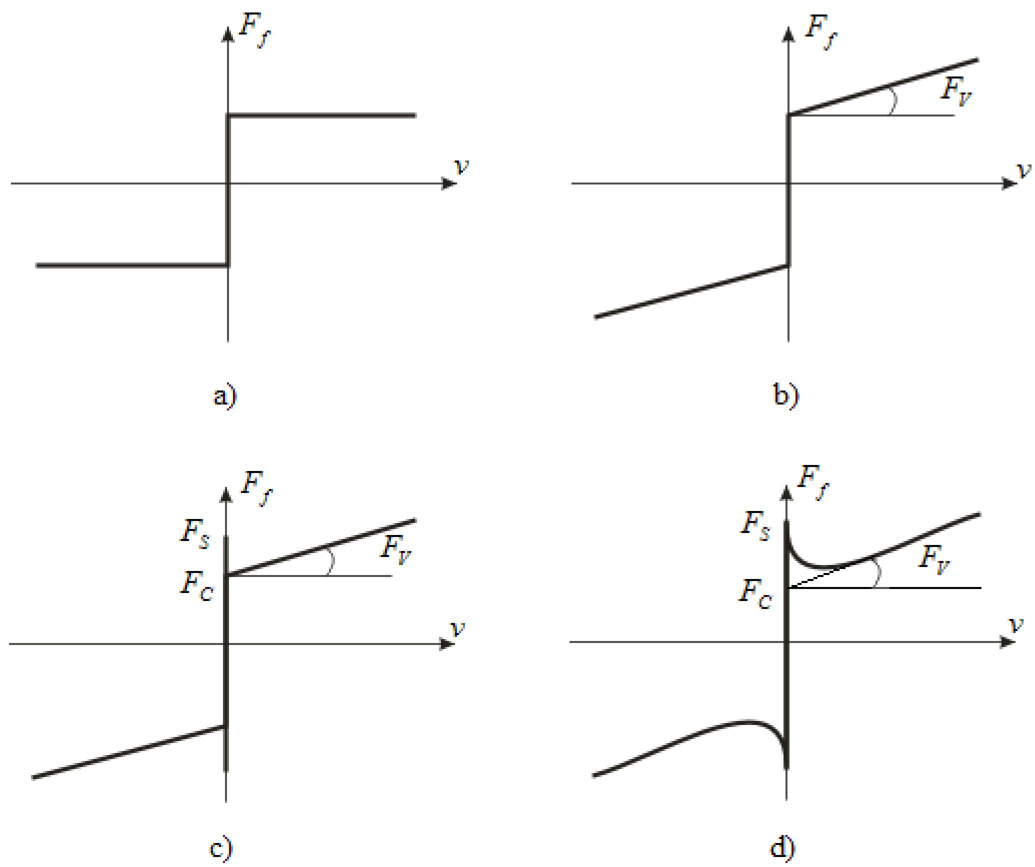
$$F = ((F_S - F_c)\eta(v) + F_c) sign(v) + F_V v, \qquad \eta(v) = \begin{cases} 1, v = 0 \\ 0, v \neq 0 \end{cases} \qquad (16)$$

A statikus együttható ($F_S > 0$) értéke általában nagyobb a Coulomb együttható értékénél.

d) *Stribek súrlódási modell* (4.d ábra): Alacsony sebességek tartományában pontosabban leírja a súrlódási hatást. Az alacsony sebességek tartományában az áttérés a statikusról a Coulomb súrlódásra valójában egy folyamatos és nem ugrásszerű jelenség, mint a c) modellben:

$$F_f = ((F_S - F_c)e^{-\frac{v}{v_S}} + F_c)sign(v) + F_V v \tag{17}$$

A modellben $v_s>0$ a Stribeck sebesség paramétert jelöli.



4 Ábra: Súrlódási modellek

A robotkarok energiája

A kinetikus (mozgási) energia: mozgásban levő testeke energiája. Egy *m* tömegű test energiája, amelynek a tömegközéppontja *v* sebességgel mozog:

$$K = \frac{mv^2}{2} \tag{18}$$

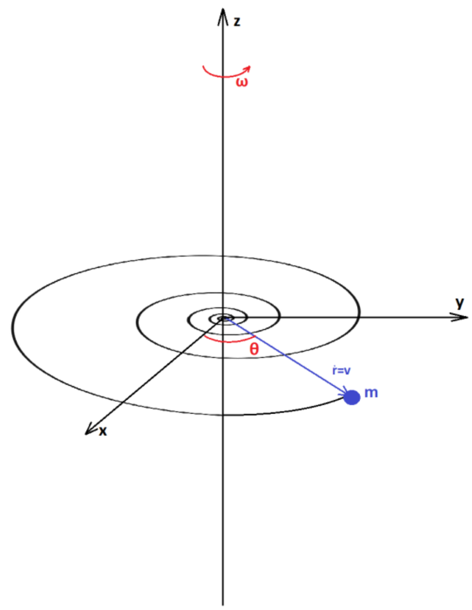
Ha egy merev test forog, a forgó mozgásból adódó kinetikus energia:

$$K = \frac{J\omega^2}{2} \tag{19}$$

Több mozgó elemből álló rendszer kinetikus energiája az elemek egyenkénti kinetikus energiájának az összege:

$$K = \sum_i K_i \tag{20}$$

Példa: Az origótól távolodó z tengely körül forgó test kinetikus energiája



5. Ábra: Origótól távolodó *z* tengely körül forgó test kinetikus energiája

Pozíció és sebesség vektorok:

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \tag{21}$$

A kinetikus energia:

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} \tag{22}$$

Ugyanez kvadratikus alakban:

$$K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Általában egy mechanikai rendszer kinetikus energiája az alábbi kvadratikus alakban írható fel:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \qquad (24)$$

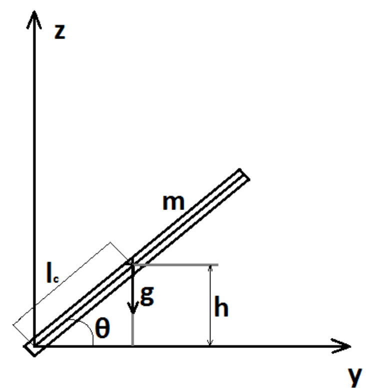
*H(**q**)* a mechanikai rendszer pozitív definit tehetetlenségi mátrixa, amely függhet a pozícióvektortól.

A potenciális (helyzeti) energia: a gravitáció robotra gyakorolt hatása miatt jön létre. Ezt mindig egy nulla energiájú referencia szinthez képtest definiáljuk. Egy *m* tömegű test potenciális energiája, amely *h* magasságra van a referenciaszinthez:

$$P = mgh \qquad (25)$$

Példa: végén rögzített rúd potenciális energiája (6. Ábra). Jelölje rúd – vízszintes tengely közötti szöget $q = \theta$. A potenciális energia:

$$P = mgh = mgl_c \sin(\theta) = mgl_c \sin(q) \qquad (26)$$



6. Ábra: Végén rögzített rúd potenciális energiája

A potenciális energia általában is pozíciófüggő:

$$P = P(\mathbf{q}) \qquad (27)$$

Akárcsak a kinetikus energiánál több testből álló rendszer potenciális energiája egyenlő a testek potenciális energiáinak összegével.

$$P = \sum_i P_i \qquad (28)$$

A robotok dinamikus modellje

A dinamikus modell meghatározásához az Euler-Lagrange egyenletből indulunk ki:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=\boldsymbol{\tau} \tag{29}$$

Az egyenletben $\boldsymbol{\tau}$ a bemeneti hatás (általánosított erővektor), robotok esetében a beavatkozók által kifejtett erők/nyomatékok vektora.
Az L Lagrange függvény a robot kinetikus és potenciális energiáinak különbsége:

$$L = K - P \tag{30}$$

Alkalmazva a (24) és (27) összefüggéseket, a Lagrange függvény

$$L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}-P(\mathbf{q}) \tag{31}$$

Oldjuk meg az Euler-Lagrange egyenletet a (31) Lagrange függvényre:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)=\dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}$$

Behelyettesítve a komponenseket Euler-Lagrange egyenletbe kapjuk:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right)+\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}=\boldsymbol{\tau} \tag{32}$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q})=\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}$$

Ebből következik a robotkarok dinamikus modellje:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})=\boldsymbol{\tau} \tag{33}$$

Az egyenletben

H – a robotkar tehetetlenségi mátrixa

C – Cetrifrugális és a Coriolis erők vektora

G – a gravitációs erő hatása

A merev, nyílt láncú robotok dinamikus modellje az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

I. A tehetetlenségi mátrix mindig szimmetrikus és pozitív definit:

$$H(\mathbf{q}) > 0 \tag{34}$$

II. A ***C*** vektor mindig felírható az alábbi alakban:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \tag{35}$$

Ahol a C mátrixra és a tehetetlenségi mátrixra mindig igaz, hogy $\dot{M} - 2C$ ferdén szimmetrikus, vagyis bármely ***x*** vektorra igaz, hogy

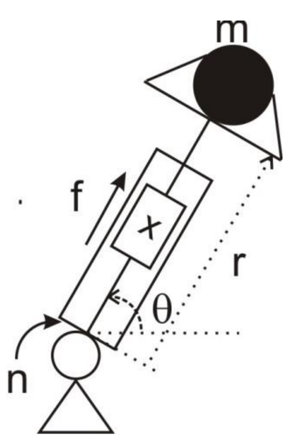
$$\mathbf{x}^T \left(\dot{M} - 2C\right)\mathbf{x} = 0 \tag{36}$$

A II. tulajdonság alapján a dinamikus robotmodell:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_F \tag{37}$$

A fenti modell figyelembe veszi súrlódási hatásokat is ($\boldsymbol{\tau}_F$), amelyek a beavatkozókban, áttételekben lépnek fel.

Példa: Két-szabadságfokú RT kar dinamikus modellje.
Legyen az ábrán látható két-szabadságfokú kar egy rotációs (R) és egy transzlációs (T) csuklóval.



Legyen a csuklópozíciók és csuklósebességek vektora:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

ahol θ az első, rotációs csukló szögelfordulása, r a második, transzlációs csukló pozíciója.
Legyen n a rotációs csukló beavatkozója által kifejtett nyomaték és f a transzlációs csukló beavatkozója által kifejtett erő. Ezekkel a jelölésekkel a robot általánosított bemeneti erővektora:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} n \\ f \end{pmatrix}.$$

Legyen a robot által mozgatott pontszerű tárgy tömege *m*. Feltételezzük, hogy a robotszegmens tömege elhanyagolható *m*-hez képest.
A dinamikus modell meghatározásához az Euler-Lagrange formalizmust alkalmazzuk.
A robot kinetikus energiája:

$$K = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

A robot potenciális energiája:

$$P = mgr\sin(\theta)$$

A Lagrange függvény:

$$L = K - P = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - mgr\sin(\theta)$$

Az Euler-Lagrange egyenlet

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

Az RT robot esetén az egyenlet komponensei:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m r^2 \dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \begin{pmatrix} m r^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgr\cos(\theta) \\ mr\dot{\theta}^2 - mgr\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Behelyettesítve a komponenseket az egyenletbe kapjuk a robot dinamikus modelljét:

$$\begin{cases} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos(\theta) = n \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\sin(\theta) = f \end{cases}$$

A modellben az $2mr\dot{r}\dot{\theta}$ komponens a Coriolis erő hatását, a $mr\dot{\theta}^2$ komponens a centrifugális erő hatását jelöli.

A modell standard alakban felírva:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

ahol

$$H(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ -mr\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} mgr\cos(\theta) \\ mg\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

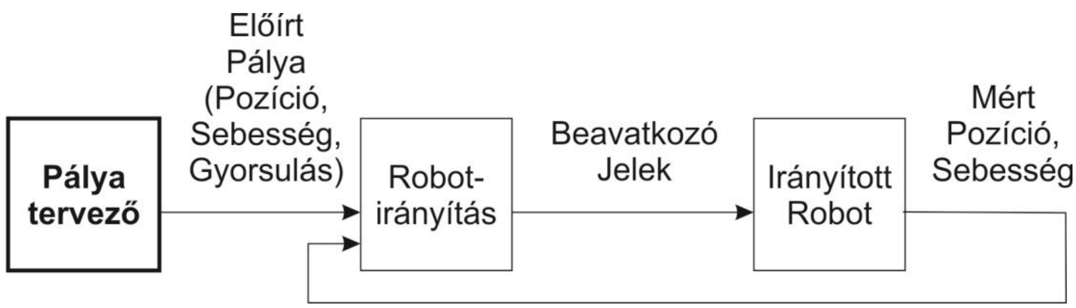
Pályatervezés robotkaroknak

Pályatervezési alapfogalmak

Pályatervező a robotok *előírt mozgását* határozza meg. A pálya a robot térbeli mozgását definiálja az idő függvényében. Ez előírt térbeli pozíció és orientáció mellett megadjuk az előírt sebességet és gyorsulást is.

A pályatervezési modul helyét a robotirányítási rendszerben az 1. Ábra mutatja. A pályatervező bemenete a felhasználó által definiált mozgásszekvencia, amit például egy robotprogramozási nyelv segítségével ír le. A robotprogramozási nyelv utasításait a robotirányítási szoftver interpretálja és a kapott adatok alapján határozza meg a pályát. Tipikus bemeneti adatok a pályatervezőbe: a térbeli pontsorozat (pályapontok), amin a robot át kell haladjon; az orientáció egy-egy adott pályapontban; hogyan mozogjon a robot két pályapont között; mennyi legyen a sebesség és gyorsulás egy-egy adott pályaszakaszon.

A pályatervező kimenete az előírt pozíció-, sebesség- és gyorsulásértékek a robotirányítási algoritmusnak (lásd az 1. Ábrát).

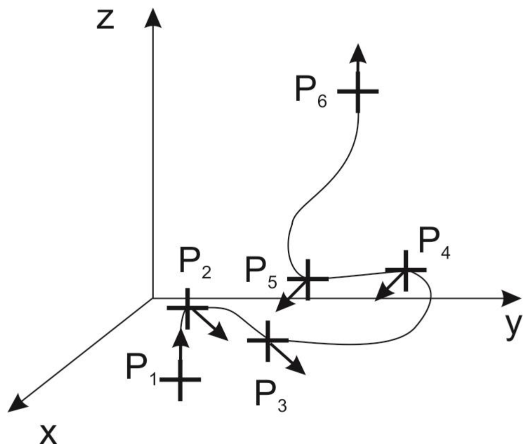


1. Ábra: Pályatervező helye a robotirányítási rendszerben

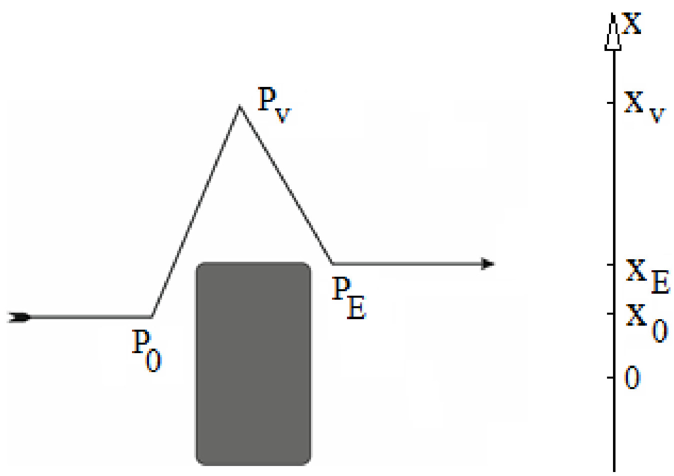
A robotirányítási feladat elvégzése során a robot végberendezése egy térbeli *pályapont sorozaton* kell áthaladjon (***P₁, P₂, ... P_N***). Egyes pontokban a robot megállhat, amíg a végberendezés egy részfeladatot elvégez (például fúrási, szerelési feladat amikor csak a végberendezés dolgozik). A feladatok elvégzése történhet mozgás közben is (például festési, heggesztési feladatok). Egy pályapontot világkoordinátákban (a végberendezés munkaterében) 6 (vagy ennél kevesebb) komponenssel definiálunk. A komponensek a térbeli koordináták valamint a végberendezés térbeli orientációját definiáló három szög (lásd a 2. Ábrát):

$$\mathbf{P_i} = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & \varphi_i & \xi_i & \theta_i \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

A robotirányítási feladatnak megfelelő pályapont sorozatot kiegészíthetjük un. *via pontokkal* (P_V), amennyiben a robot munkaterében akadályok vannak. Síkbeli mozgás esetében a via pont elhelyezésére lásd a 3. Ábrát.



2. Ábra: Robotpálya térben



3. Ábra: Via pont (*P_V*) a robotpályában

Egy szabadságfokot nézve a *pálya* (***p_1***) egy időfüggvény, amely minden egyes időpillanatban a megadja az előírt pozíciót (*x(t)*). Ennek az időfüggvénynek az éréktartománya tartalmazza a pályapontokat (interpolálás).
Az előírt sebesség (*v(t)*) az előírt pozíció deriváltja, az előírt gyorsulás (*a*) az előírt sebesség deriváltja:

$$\mathbf{p_1}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mintavételes megvalósítás esetében a pálya egy vektor, amely minden diszkrét időpillanathoz hozzárendeli az előírt pozíció-, sebesség- és gyorsulásértékeket.

1. Táblázat: A pálya (*p_1*) mintavételes megvalósítása

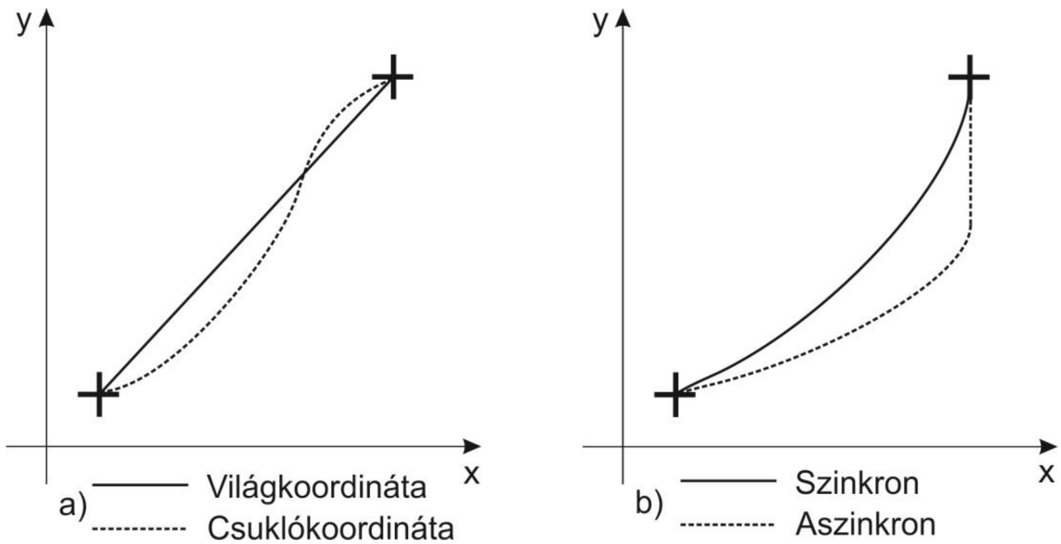
t	t[1]	t[2]	...	t[M]
x	x[1]	x[2]	...	x[M]
v	v[1]	v[2]	...	v[M]
a	a[1]	a[2]	...	a[M]

Két időpillanat közötti különbség a robotirányítási algoritmus mintavételi periódusa. (*t[k] – t[k-1] = T*).
Több szabadságfok esetében a teljes pályát az egyes szabadságfokok pályáinak összessége definiálája:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n\end{pmatrix}^T \tag{3}$$

A pálya tervezése történhet csuklókoordinátákban vagy világkoordinátákban. Amennyiben a pályát *csuklókoordinátákban* tervezzük, a robot csuklók beavatkozóinak adjuk meg az előírt mozgását. Ebben az esetben a pályatervezés előnye, hogy az inverz geometriai feladatot csak a pályapontokra kell megoldani. A pályapontoknak megfelelő csuklópozíciókra fektetjük rá a robotpályát, tehát a pályát csuklókoordinátákban kapjuk meg. A módszer másik előnye, hogy a pálya tervezésénél kihasználhatjuk a csuklóbeavatkozók maximális sebességét illetve gyorsulását, ugyanis a sebességeket és gyorsulásokat is csuklókoordinátákban tervezzük. A módszer hátránya, hogy a végberendezés két pályapont között nem a pályapontokat összekötő egyenesen fog áthaladni, mivel a pályát nem végberendezés pozícióját definiáló világkoordinátákban történik.
Amennyiben a pályát *világkoordinátákban* tervezzük a pálya minden időpillanatban a vérberendezés előírt mozgását adja meg. Így biztosítható például az, hogy a végberendezés a pályapontokat összekötő egyenesen fog áthaladni. Ugyanakkor komplexebb mozgásokat is előírhatunk a végberendezésnek, mint például harmonikus vagy körmozgást. Hátránya, hogy az irányítás megvalósításához a teljes pályára (az 1. Táblázat minden oszlopára) meg kell oldani az inverz geometriai feladatot. Ugyancsak hátrány, hogy a sebesség és gyorsulás is világkoordinátákban számolódik. Ennek az a következménye, hogy nem lehet kihasználni a beavatkozók által csuklókoordinátákban elérhető legnagyobb sebességet és gyorsulást a teljes pálya mentén, mivel a végberendezés sebessége és gyorsulása nem csak a beavatkozók sebességétől illetve gyorsulásától, hanem a csuklókonfigurciótól is függ a robot Jacobi mátrixán keresztül. ($\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$).

Szinkron és aszinkronpályák: Több szabadságfokú robotok esetében minden szabadságfok mentén meg kell tervezzük a pályát. Ebben az esetben előfordulhat, hogy valamelyik szabadságfok esetében egy pályaszakasz hamarabb végrehajtódik, mint a többi. Ilyenkor a pályatervezésnél két lehetőség van. Az első lehetőség, hogy mindegyik pályaelem esetében kihasználjuk a maximális sebességet és gyorsulást és minden pályapontban a gyorsabb szabadságfokok mentén a mozgás hamarabb befejeződik és ezek a pályapontban bevárják, hogy a többi szabadságfok esetében is végrehajtódjon a mozgás (aszinkron pálya). A második esetben úgy állítjuk be az összes pályaelem maximális előírt sebességét és gyorsulását, hogy az összes szabadságfok mentén a mozgás ugyanabban az időpillanatban fejeződjön be. Két szabadságfok esetében lásd a 4. Ábrát. A 4.b Ábrán látható aszinkron pálya esetében az *x* tengely mentén a mozgás hamarabb befejeződött mint az *y* tengely mentén.



4. Ábra: Pályatervezési lehetőségek:
a) – Világkoordinátában vs. Csuklókoordinátában
b) – Szinkron vs. Aszinkron

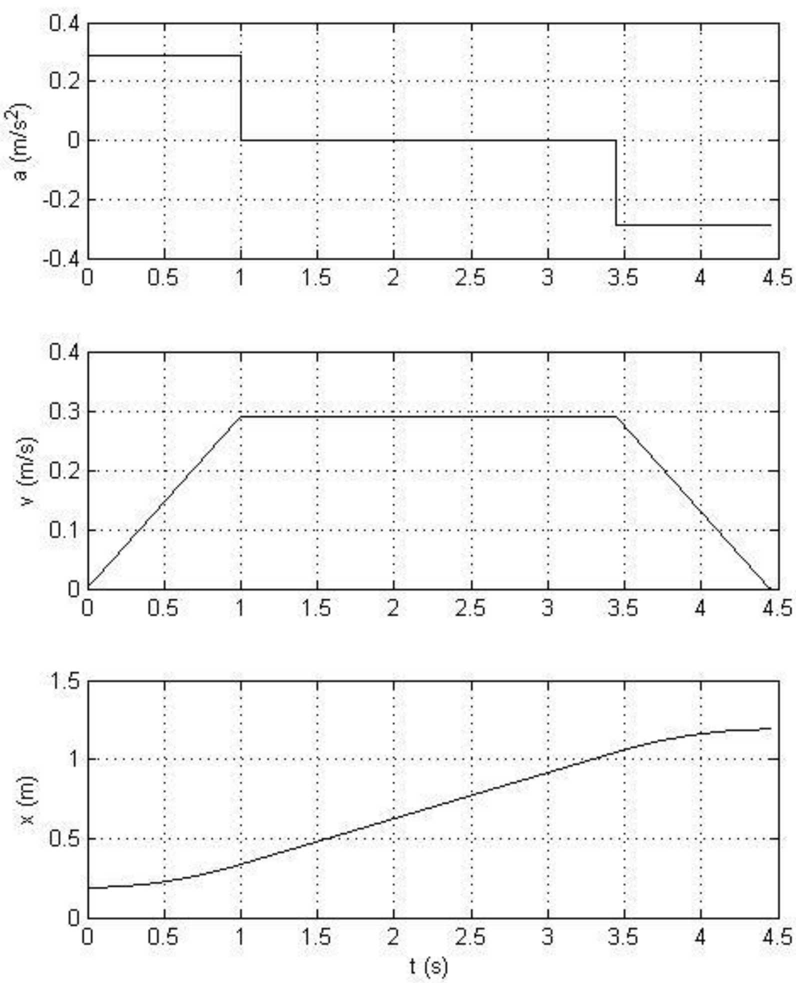
Pályaelem polinomokon alapuló tervezése

Pályaelemnek nevezzük a robot pályájának két pályapont közötti részét egy szabadságfok mentén. A teljes robotpálya a pályaelemek sorozatából fog összeállni minden szabadságfok mentén.
A tervezés során meghatározzuk pályaelemhez tartozó előírt pozíciót, sebességet és gyorsulást. Ahhoz, hogy a robotpálya folytonos legyen, a pályapontokban a találkozó pályaelemek előírt sebességei, gyorsulásai, kezdő- illetve végértékei is meg kell, hogy egyezzenek.
A tervezéshez legyenek a bemeneti adatok:

- kiindulópont: x_0
- végpont: x_E
- abszolút maximális sebesség: $v_{MAX}>0$
- abszolút maximális gyorsulás: $a_{MAX}>0$

A maximális sebesség csuklókoordinátákban meghatározható a beavatkozó maximális sebessége alapján. A maximális gyorsulás meghatározható a beavatkozó által

maximálisan kifejtett erő/nyomaték (F_{MAX}) illetve a maximális teher (m_{MAX}) ismeretében ($a_{MAX} = F_{MAX}/m_{MAX}$).
A tervezéshez feltételezzük, hogy a kiinduló- és a végpontokban a sebesség és gyorsulásértékek zérók, valamint a pályát a $t=0$ pillanattól számítjuk. Ugyancsak feltételezzük, hogy $0 \leq x_0 < x_E$.
A pályaelemet polinomok segítségével fogjuk leírni az idő függvényében. A tervezés biztosítja, hogy adott v_{MAX} és a_{MAX} mellett a pálya időben optimális legyen. A pályát az alábbi elv alapján tervezzük: a robotot gyorsítjuk maximális gyorsulással, amíg elérjük a maximális sebességet. Ezután a tartjuk a maximális sebességet nulla gyorsulás mellett. A pálya végén ugyanannyi időt, mint amennyit gyorsítottunk, annyit lassítunk (lásd az 5. Ábrát).



5. Ábra: Pályaelem polinomokon alapuló tervezése

Az 5. Ábrán látható a pályaelem három szakaszra bontható fel: gyorsuló- (1), konstans sebesseég- (2) és lassuló szakaszra (3).

A *gyorsuló szakaszon* (1) a gyorsulás konstans tehát a sebesség első fokú polinommal, a pozíció másodfokú polinommal írható le. Legyen általánosan a polinomok alakja:

(4)

$$x_1(t) = c_{x1}t^2 + b_{x1}t + a_{x1}$$
$$v_1(t) = b_{v1}t + a_{v1}$$
$$a_1(t) = a_{a1}$$

Ebben a szakaszban a gyorsulás konstans, $a_{a1}=a_{MAX}$. Figyelembe véve, hogy $a_1(t) = \dot{v}_1(t)$, következik $b_{v1}=a_{MAX}$. Mivel a sebesség a $t=0$ pillanatban 0, következik $a_{v1} = 0$. Figyelembe véve, hogy $v_1(t) = \dot{x}_1(t)$, következik $c_{x1}= a_{MAX}/2$, valamint $b_{x1}=0$. Mivel a pozíció a $t=0$ pillanatban x_0, következik $a_{x1}=x_0$.
Ugyancsak meghatározható a gyorsuló szakasz ideje valamint hossza.

(5)

$$t_1 = v_{MAX} / a_{MAX}$$
$$x_1 = x_1(t_1) - x_0 = v_{MAX}^2 / 2a_{MAX}$$

A *konstans sebesség szakaszon (2)* a gyorsulás zéró, így a sebesség és pozíció pályaelemek általánosan

(6)

$$x_2(t) = b_{x2}(t - t_1) + a_{x2}$$
$$v_2(t) = a_{v2}$$
$$a_2(t) = 0$$

Ebben a szakaszban a sebesség maximális $a_{v2}=v_{MAX}$. Mivel $v_2(t) = \dot{x}_2(t)$, $b_{x2}=v_{MAX}$. A $t=t_1$ pillanatban a pozíció $x_2(t_1)=x_1$, tehát $a_{x2}=x_1$.
Ugyancsak meghatározható a konstans sebesség szakasz befejezésének időpillanata és pozíciója. Kihasználjuk, hogy a gyorsulási és lassulási szakaszok hossza és időtartama egyenlők.

(7)

$$x_2 = x_E - x_1 + x_0$$
$$t_2 = (x_2 - x_1) / v_{MAX} + t_1$$

A *lassuló (3) szakaszon* a pozíciót szintén másodfokú polinomokkal közelíthetjük meg.

(8)

$$x_3(t) = c_{x3}(t - t_2)^2 + b_{x3}(t - t_2) + a_{x3}$$
$$v_3(t) = b_{v3}(t - t_2) + a_{v3}$$
$$a_3(t) = a_{a3}$$

Ebben a szakaszban a gyorsulás konstans, a_{a3}=-a_{MAX}. Figyelembe véve, hogy $a_3(t) = \dot{v}_3(t)$, következik b_{v3}=-a_{MAX}. Mivel a sebesség a t=t_2 pillanatban v_{MAX}, következik a_{v3}=v_{MAX}. Figyelembe véve, hogy $v_3(t) = \dot{x}_3(t)$, következik c_{x3}=-$a_{MAX}/2$, valamint b_{x3}=v_{MAX}. Mivel a pozíció a t=t_2 pillanatban x_2, következik a_{x3}=x_2.
Abban az esetben, hogyha a kiinduló pozíció és a végpozíció közötti távolság kicsi, előfordulhat, hogy a sebesség nem éri el a v_{MAX} értéket. Ebben az esetben a pálya csak egy gyorsuló és egy lassuló szakaszt fog tartalmazni. Annak a feltétele, hogy a pályaelem csak kétszakaszos legyen:

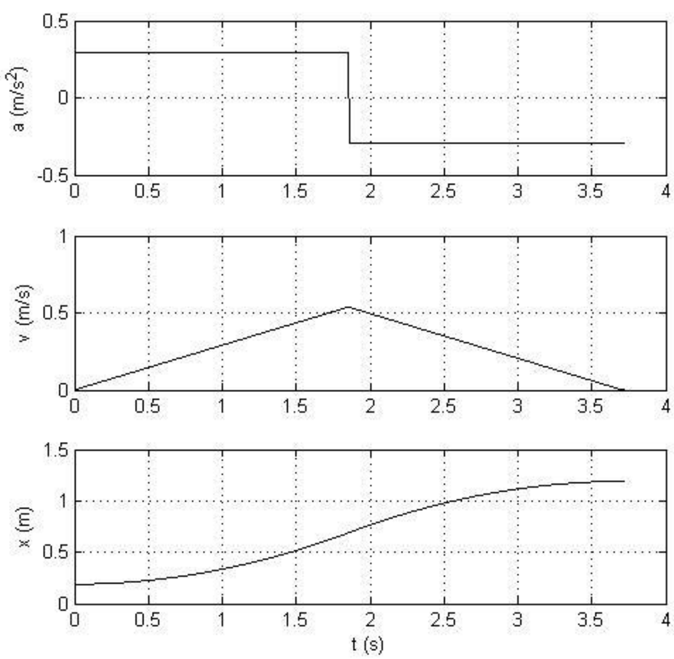
$$x_E - x_0 \leq 2(x_1 - x_0) \tag{9}$$

Ahol x_1 az (5) összefüggésben adott. Ebben az esetben a gyorsulási szakasz hossza illetve ideje:

(10)

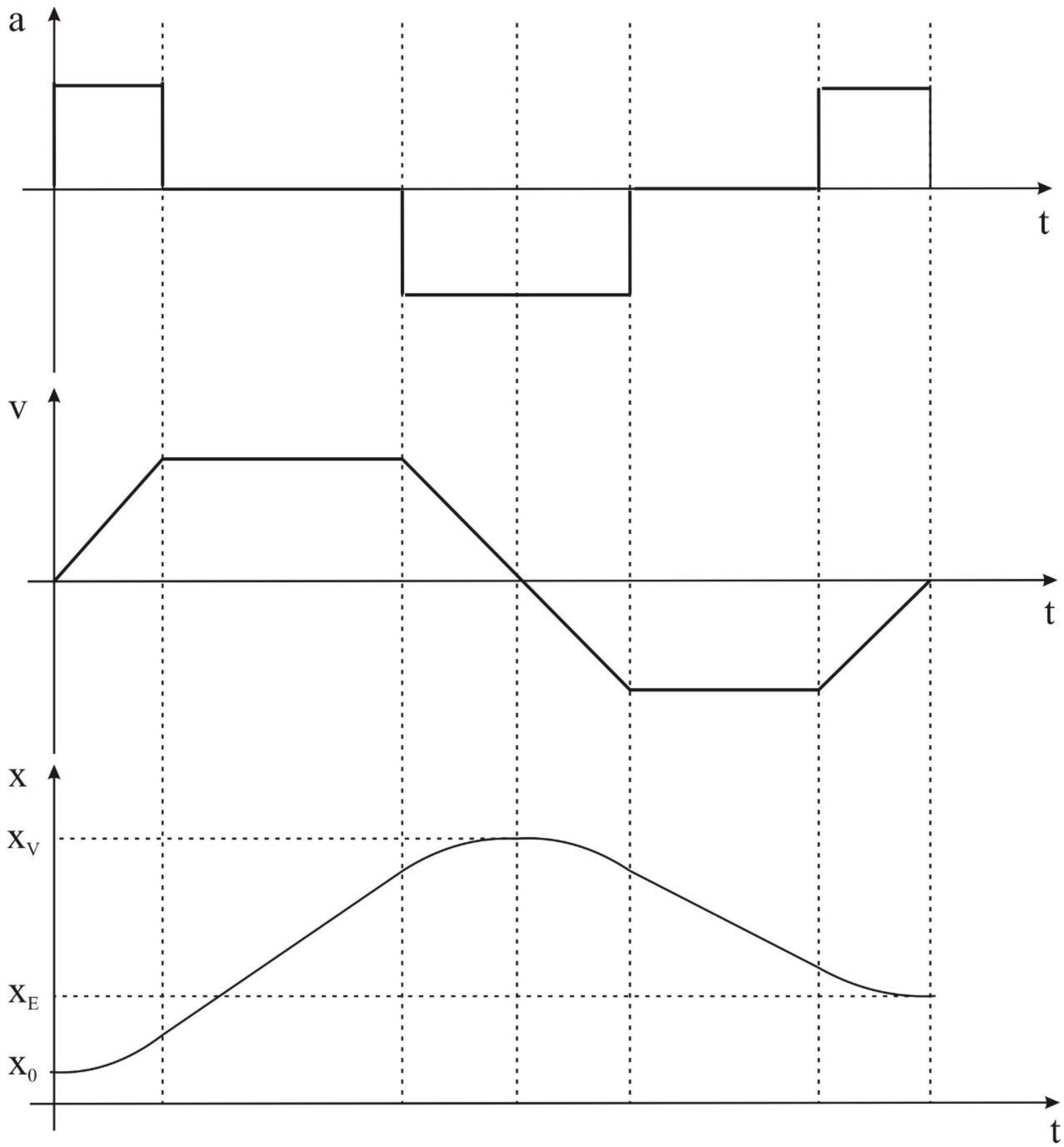
$$x_{12} = (x_E - x_0)/2$$
$$t_{12} = \sqrt{\frac{x_E - x_0}{a_{MAX}}}$$

A bemutatott pályatervezési módszer könnyen általánosítható bármilyen kezdő- és végpozíció értékekre, figyelembe véve a pozícióértékek előjelét.
Más pályatípusok is elterjedtek a gyakorlatban, például tervezhetünk olyan pályát, amelyben a gyorsulás értéke folytonos, magasabb fokú polinomokat használva.



6. Ábra: Pályaelem polinomokon alapuló tervezése konstans sebességű szakasz nélkül

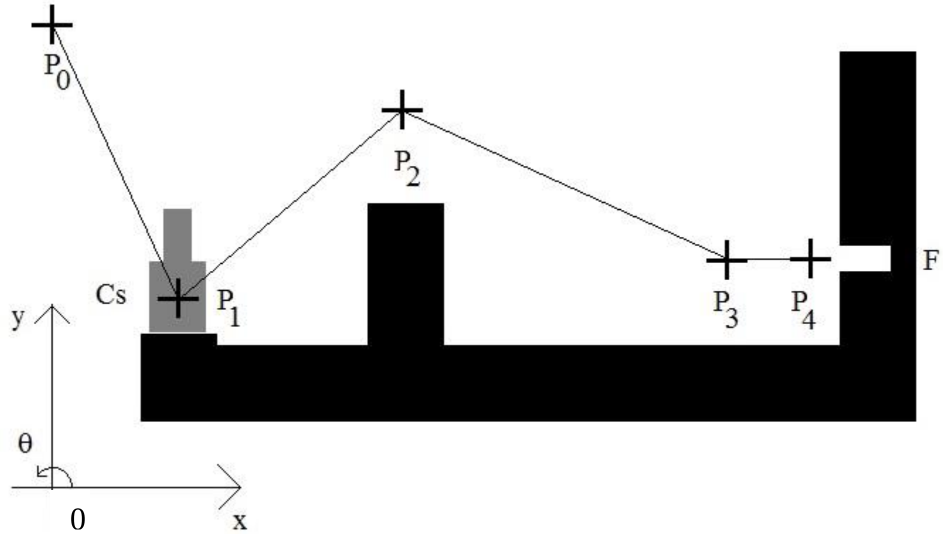
Egy via ponton történő áthaladás (lásd 3. Ábra) esetén, a robot pályát az *0x* tengely mentén a 7. Ábra mutatja.



8. Ábra: Robotpálya via ponton történő áthaladás esetén

Példa: (Csap - furat feladat)

Legyen a 8. ábrán látható munkatér.



7. Ábra: A csap – furat feladat

Feladat: A feladat a csap (*Cs*) elhelyezése a munkatérben levő furatba (*F*) egy megfogó-végberendezéssel rendelkező robot segítségével. Fekete jelöli a munkatérben található akadályt. Tervezzük meg robot végberendezésének pályáját világkoordinátákban a feladatnak megfelelően.
Síkbeli mozgást feltételezünk.
Megoldás:
- Vegyünk fel egy referencia koordinátarendszert (*x0y*), lásd az ábrát.
- Meghatározzuk a feladatnak megfelelő jellegzetes pontokat a munkatérben ($P_i(x_i, y_i, \theta_i)$):

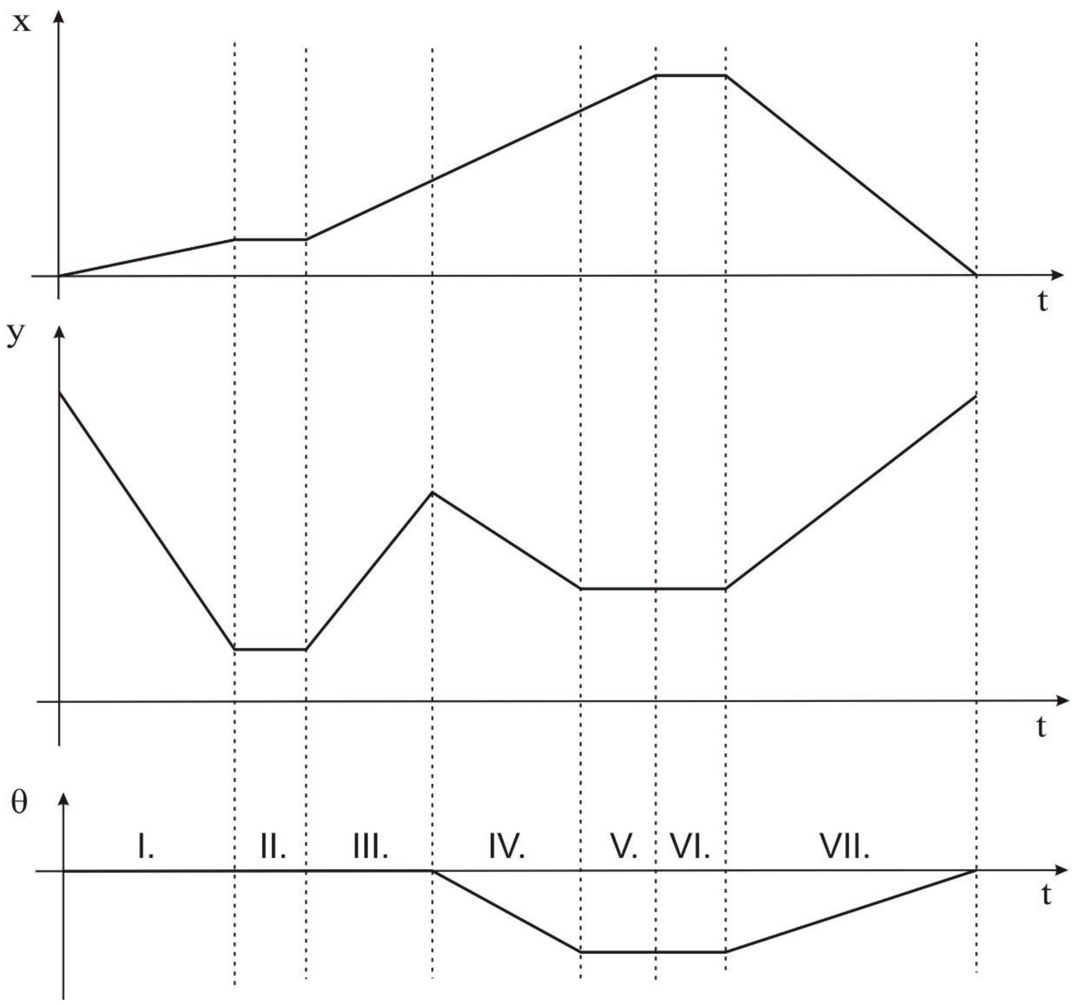
P_0 – a robot kezdőpozíciója
P_1 – a csap kezdőpozíciója
P_2 – via-pont, az akadály elkerüléséhez
P_3 – a furat megközelítésének pozíciója
P_4 – a csap végpozíciója

- A feladatnak megfelelő mozgássorozat:

I. A robot megközelíti a csapot. ($P_0 \rightarrow P_1$)
II. A robot megfogja a csapot. (P_1)
III. IV. A robot megközelíti a furatot a via-ponton keresztül. ($P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$)
V. A robot betolja csapot a furatba. ($P_3 \rightarrow P_4$)
VI. A robot elengedi a csapot. (P_4)
VII. A robot visszamegy a kiinduló pozícióba. ($P_3 \rightarrow P_0$)

A II. és VI. szekvenciákban a megfogó nem mozdul el, ezekben a szekvenciákban csak a megfogás/elengedés idejének megfelelő késleltetést feltételezünk.

A robot pozíciópályája a munkatér koordinátái mentén az alábbi ábrán látható.

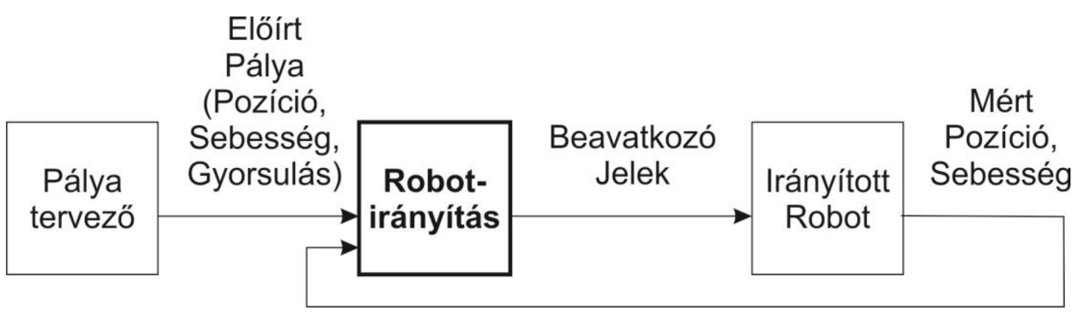


8. Ábra: A robot végberendezésének pályája a csap furat feladat esetén

Robotok Irányítása

Bevezető

A robotirányítási algoritmus felelős azért, hogy a robot végberendezése eljusson egy megadott célkonfigurációba, vagy végighaladjon egy megadott pályán.
Alkalmazástól függően megkülönböztetünk szabad mozgást illetve kényszermozgást. *Szabad mozgás* esetében a robot végberendezése nem hatnak kűlső erők, nyomatékok, szabadon mozog a térben, nem számítunk kontaktusra a környezettel.
Kényszermozgás esetében a végberendezés kapcsolatba kerül a környezettel és ennek megfelelően a robot mozgását külső erőhatások is befolyásolják, amelyet figyelembe kell vegyünk az irányításnál. Ebben az esetben célszerű a végberendezést erőmérő érzékelőkkel felszerelni.
Szabad mozgást megvalósító irányításnál megkülönböztetünk *Ponttól-Pontig (PTP – Pont To Point) irányítást* és *pályakövetést megvalósító irányítást*. Az első esetben csak a pályapontsorozatot adjuk meg a robotmozgás előírásánál, az irányítás célja hogy a robot az adott térbeli konfigurációt véges időn belül adott pontossággal elérje. Pályakövetés esetében a mozgás minden pillanatában előírjuk a pozíciót, sebességet illetve gyorsulást.
Az irányítási algoritmus bemenete a pálaytervező által kiszámított előírt mozgás (pozíció illetve sebesség, gyorsulás) a kimenete (beavatkozó jel) a csukló erők/nyomatékok, amelyeket a beavatkozók kell, hogy kifejtsenek (lásd 1. Ábra).



1. Ábra Az irányítási algoritmus helye a robotirányítási rendszerben

Ponttól-Pontig Irányítás megvalósítása PD+G szabályozóval

Az irányítást csuklókoordinátákban tervezzük, az előírt pozíciót csuklókoordinátákban adjuk meg. Ponttól-Pontig irányítás esetén az előírt pozíció konstans:

$$\mathbf{q_{ref}} = const. \tag{1}$$

Az irányítás megvalósításához a csuklópozíciót ($\boldsymbol{q}$) szükséges mérni. A beavatkozó jelet a PD (Proporcionális-Derivatív) irányítási algoritmus alapján számíthatjuk kiegészítve egy, a gravitációs hatást kompenzáló taggal. Az *i*ik csuklóra az irányítást az alábbi formában számítjuk:

$$\tau_i(t) = K_{P_i}\left(e_i(t) + T_{d_i}\frac{de_i}{dt}\right) + G_i(\mathbf{q}), \quad e_i = q_{ref_i} - q_i \tag{2}$$

$K_{P_i} \geq 0$ – proporcionális erősítés

$T_{d_i} > 0$ – deriválási idő

A beavatkozó jelet a teljes robotra az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{P1} & & & 0 \\ & K_{P2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{Pn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{d1} & & & 0 \\ & T_{d2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_{dn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} G_1(\mathbf{q}) \\ G_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ G_n(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = K_P\left(\mathbf{e} + T_d\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{3}$$

A robotirányítási rendszer analízisét a Lyapunov tétel segítségével végezhetjük el. Igazolni fogjuk, hogy a robotirányítási rendszer stabil valamint, hogy az ***e*** szabályozási hiba 0-ba konvergál. Az irányítás analíziséhez a robot dinamikus modelljét alkalmazzuk:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

A Lyapunov tétel:

Legyen az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{*}$$

dinamikus rendszer, ahol $\mathbf{x} \in R^n$.

Definíciók: Vezessük be az egyensúlyi állapot fogalmát. Az $\boldsymbol{x}^*$állapot *a rendszer egyensúlyi állapota*, ha a t^* pillanatban a rendszer állapota $\boldsymbol{x}^*$, akkor bármely $t>t^*$ pillanatban az állapot $\boldsymbol{x}^*$ marad.

Az $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ egyensúlyi állapot Lyapunov értelemben *aszimptotikusan stabil* a $t=t_0$ időpillanatban, ha létezik $r(t_0) >0$ úgy, hogy ha $||\boldsymbol{x}(t_0)||<r$ akkor $||\boldsymbol{x}(t)||\rightarrow 0$, ha $t\rightarrow\infty$.

Tétel: A (*) rendszer $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ egyensúlyi állapota aszimptotikusan stabil ha létezik egy $V(\mathbf{x})$ Lyapunov energiafüggvény, amelyre igaz, hogy:

- $V(\boldsymbol{x}) > 0$, ha $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,
- $V(\boldsymbol{x}) = 0$, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
- $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, ha $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Rendeljük a robotirányítási rendszerhez az alábbi Lyapunov függvényt:

$$V(t)=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_P \mathbf{e} \tag{5}$$

$H(\mathbf{q})>0$ a robot pozitív definit inerciamátrixa, $K_P>0$ pozitív diagonális mátrix, tehát $V(t)\geq 0$.

Lyapunov függvény deriváltja:

$$\dot{V}(t)=\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T K_P \mathbf{e}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_P \dot{\mathbf{e}} \tag{6}$$

Kihasználva, hogy bármely szimmetrikus A mátrix esetén igaz, hogy $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}=\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$, következik:

$$\dot{V}(t)=\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{e}}^T K_P \mathbf{e} \tag{7}$$

Az (1) összefüggésből következik, hogy $\dot{\mathbf{e}}=-\dot{\mathbf{q}}$.

$$\dot{V}(t)=\dot{\mathbf{q}}^T H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{H}(q)\dot{\mathbf{q}}-\dot{\mathbf{q}}^T K_P \mathbf{e} \tag{8}$$

Behelyettesítve a (8) egyenletbe a $H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ kifejezést a robot (4) dinamikus modelljéből, amelyben a $\boldsymbol{\tau}$ bemenetet a PD+G (3) irányítási algoritmus adja, kapjuk, hogy:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}=-C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}-G(\mathbf{q})+\boldsymbol{\tau}=-C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}-G(\mathbf{q})+K_P\mathbf{e}+K_P T_d\dot{\mathbf{e}}+G(\mathbf{q})$$

$$\dot{V}(t)=\dot{\mathbf{q}}^T\left(-C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}+K_P\mathbf{e}+K_P T_d\dot{\mathbf{e}}\right)+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}-\dot{\mathbf{q}}^T K_P\mathbf{e}$$

$$\dot{V}(t)=\dot{\mathbf{q}}^T\left(-C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\frac{1}{2}\dot{H}(\mathbf{q})\right)\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}^T K_P\mathbf{e}+\dot{\mathbf{q}}^T K_P T_d\mathbf{e}-\dot{\mathbf{q}}^T K_P\mathbf{e} \tag{9}$$

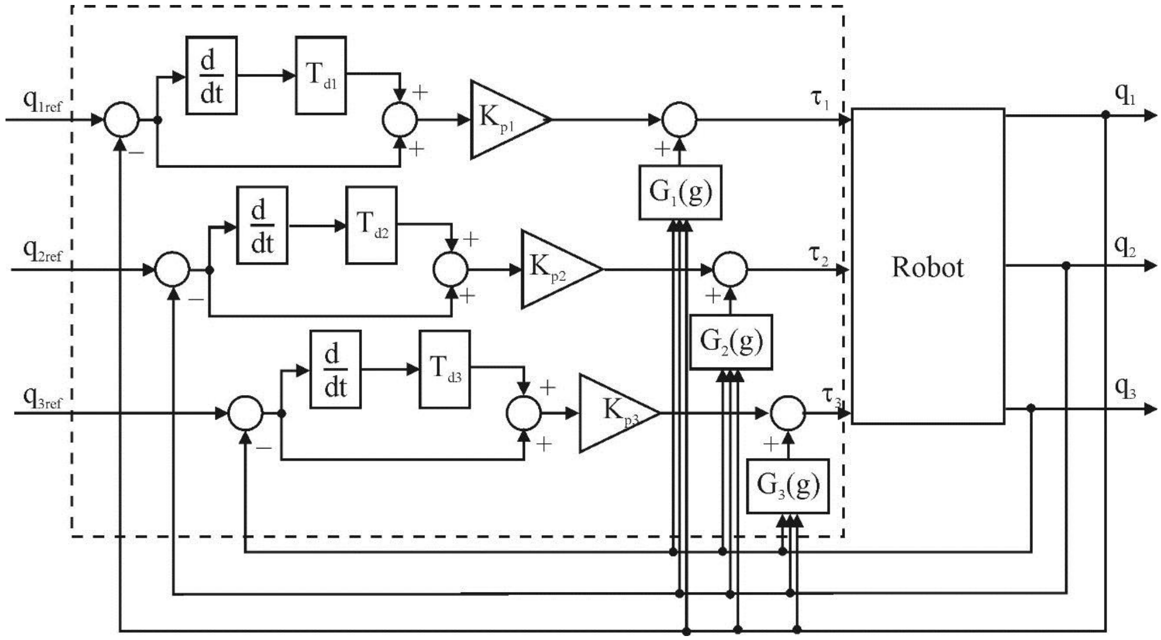
A robot dinamikus modelljének tulajdonsága alapján $\dot{\mathbf{q}}^T\left(-C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\frac{1}{2}\dot{H}(\mathbf{q})\right)\dot{\mathbf{q}}=0$;

ugyanakkor $\dot{\mathbf{e}}=-\dot{\mathbf{q}}$. Ennek megfelelően:

$$\dot{V}(t)=-\dot{\mathbf{q}}^T K_P T_d\dot{\mathbf{q}} \tag{10}$$

$K_P T_d$ pozitív definit, tehát $\dot{V}(t)<0\ \forall\dot{\mathbf{q}}\neq 0$. Tehát a robotirányítási rendszer $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$ egyensúlyi pontja aszimptotikusan stabil. A Lyapunov energiafüggvény megfogalmazásából ugyancsak következik, hogy a PD+G irányítás biztosítja azt, hogy a robot eljusson az előírt konfigurációba: $\mathbf{e}=\mathbf{q}_{ref}-\mathbf{q}\to 0$ ha $t\to\infty$.

Az irányítási rendszer tömbvázlata 3 szabadságfokú robotok esetében a 2. Ábrán látható.



2. Ábra: PD+G robotirányítás DOF=3 esetében

Robotok Ponttól-Pontig irányítása PID szabályozóval

A szabályozó integráló komponense segítségével a gravitációt kompenzáló tagot válthatjuk ki a PD+G szabályozóból. Az integráló komponens képes kompenzálni a szakaszosan konstans bemeneti terhelés hatását az állandósult állapotbeli hibára, vagyis konstans pozíció referencia mellett az állandósult állapotbeli hiba zéró lesz akkor is, ha a bemeneten konstans terhelés van. Amennyiben a robot a referencia konfiguráció közelében van, feltételezhetjük, hogy a gravitációs komponens megközelíthető egy konstanssal és a robot lassan mozog: $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{q}_{ref}), \dot{\mathbf{q}} \approx 0$.

A PID robotszabályozó alakja:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = K_P \left(\mathbf{e}(t) + T_D \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{1}{T_I} \int_0^t \mathbf{e}(\sigma) d\sigma \right) \tag{11}$$

$$\frac{1}{T_I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_{I1}} & & & 0 \\ & \frac{1}{T_{I2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{T_{In}} \end{pmatrix}, \quad \int_0^t \mathbf{e}(\sigma) d\sigma = \begin{pmatrix} \int_0^t e_1(\sigma) d\sigma \\ \int_0^t e_2(\sigma) d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^t e_n(\sigma) d\sigma \end{pmatrix}$$

A PID szabályozó esetében az *i*ik csukló beavatkozó jelének számításához csak az *i*ik csukló mért pozíciójára van szükség, a beavatkozó jel számításához nem szükséges ismerni a többi csukló mért pozícióját (*decentralizált szabályozás*). Ez egyszerűbbé teszi a szabályozó implementálását.
Vegyük figyelembe az irányított robotmodellben a súrlódási komponenst is:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_F \tag{12}$$

A modellben súrlódási hatást a Coulomb + Viszkózus modell írja le, vagyis az *i*ik csuklóban:

$$\tau_{Fi} = F_C \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) + F_V \dot{q}_i \tag{13}$$

A szabályozó paramétereinek tervezéséhez a robotcsukló linearizált modelljét használjuk fel. Linearizáljuk a modellt $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_{ref}$ és zéró sebesség körül. Ugyanakkor feltételezzük, hogy a H inerciamátrixban az átlón található elemek a dominánsak, a kereszthatások elhanyagolhatóak. Ebben az esetben az *i*ik csukló modellje:

$$m_{ii}(\mathbf{q}_{\mathbf{ref}})\ddot{q}_i + F_V\dot{q}_i + G_i(\mathbf{q}_{\mathbf{ref}}) + F_C \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) = \tau_i \tag{14}$$

Az egyenletben m_{ii} a H mátrix (i,i) elemét jelöli. A viszkózus súrolódási komponenst nem hanyagoljuk el, mert sebességben lineáris.
A robotcsukló dinamikája PID szabályozóval:

$$m_{ii}\ddot{q}_i + F_V\dot{q}_i = K_{Pi}(q_{refi} - q_i) + K_{Pi}T_{Di}(\dot{q}_{refi} - \dot{q}_i) + \frac{K_{Pi}}{T_{Ii}}\int_0^t (q_{refi} - q_i)\,d\sigma - d_i \tag{15}$$

$$d_i = G_i + F_C$$

A gravitáció és a Coulomb súrlódás együttes hatása a szabályozási körben bemeneti terhelésként jelenik meg (d_i).
Az $e_i = q_{refi} - q_i$ csuklópozíció-szabályozási hiba dinamikája:

$$m_{ii}\ddot{e}_i + (K_{Pi}T_{Di} + F_V)\dot{e}_i + K_{Pi}e_i + \frac{K_{Pi}}{T_{Ii}}\int_0^t e_i\,d\sigma = d_i \tag{16}$$

Mivel d_i konstans, a (16) az egyenlet mindkét oldalát deriválva kapjuk:

$$\dddot{e}_i + \frac{K_{Pi}T_{Di} + F_V}{m_{ii}}\ddot{e}_i + \frac{K_{Pi}}{m_{ii}}\dot{e}_i + \frac{K_{Pi}}{m_{ii}T_{Ii}}e_i = 0 \tag{17}$$

A szabályozóparaméterek meghatározásához alkalmazhatjuk a referencia modell alapú tervezést. Legyen a robotcsukló kívánt dinamikáját leíró differenciálegyenlet:

$$\dddot{e}_i + p_2\ddot{e}_i + p_1\dot{e}_i + p_0e_i = 0 \tag{18}$$

Az egyenletben a p_2, p_1, p_0 a referencia-karakterisztikus polinom együtthatói. A szabályozó K_{Pi}, T_{Ii}, T_{Di} paramétereit az alábbi egyenletrendszer megoldásából kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{K_{Pi}T_{Di} + F_V}{m_{ii}} &= p_2 \\ \frac{K_{Pi}}{m_{ii}} &= p_1 \\ \frac{K_{Pi}}{m_{ii}T_{Ii}} &= p_0 \end{aligned} \tag{19}$$

A PID szabályozó segítségével nem csak a gravitációs komponenst, hanem a konstans Coulomb súrlódási komponenst is kompenzálhatjuk. Amennyiben a robotcsukló áttételeiben domináns a PD+G szabályozót is kibővíthetjük PID+G szabályozóra.

Feladat: A (14) modellt felhasználva alkalmazzuk a referencia modell alapú szabályozóparaméter tervezést a PD+G típusú szabályozásra.