Robotok Geometriája és Kinematikája

A geometriai modell a robotok térbeli elhelyezkedését írja le egy adott időpillanatban. Nem tárgyalja a robot mozgását,sebesség- és gyorsuláskomponenseket nem tartalmaz. A modell fontos alkalmazása, a robot végberendezése térbeli pozíciójának, orientációjánakmeghatározásaamennyiben ismerjük a robot csuklóinak a pozícióit illetve a robot architektúráját (direkt geometriai feladat).Az inverz geometriai feladat kiemelkedően fontos a robotirányításhoz: egy ismert robot adott végberendezés pozíciójához illetve orientációjához határozzuk meg a csuklópozíciókat ismert robot architektúra.

A fejezet először a térbeli pozíció és orientáció általános leírását tartalmazza. A robotok geometriájának leírásánál a Denavit-Hartenberg konvenciót alkalmazzuk.

A robot mianuipulátorok csuklózebesséegei és a végberendezés sebességkomponensei közötti összefüggést a Jacobi mátrix segítségével írjuk le.

A koordináta rendszerek (referencia keretek) definiálásához a jobb kéz szabály alkalmazzuk: a jobb kezünk első három ujja a hüvelykujjtól kezdődően jelentik az *x*, *y* illetve a *z* tengelyeket. Egy tengely körüli pozitív forgásirányt szintén a jobb kéz szabály segítségével határozzuk meg: a jobb hüvelykujj jelöli az irányítotttengelyt a behajlított többi új iránya a pozitív forgásirányt adja.

A fejezetben a bonyolultabb trigonometriai kifejezések esetében a $\cos(\varphi) = C_\varphi$, $\sin(\varphi) = S_\varphi$, $\cos(\varphi + \theta) = C_{\varphi+\theta}$ jelöléseket alkalmazzuk.

Pozíció leírása térben

Egy térbeli pont *P* pozíciója egy vektorral jellemezhető. Legyenek a koordináta rendszer *x, y* és *z*tengelyeihez rendelt egységvektorok:

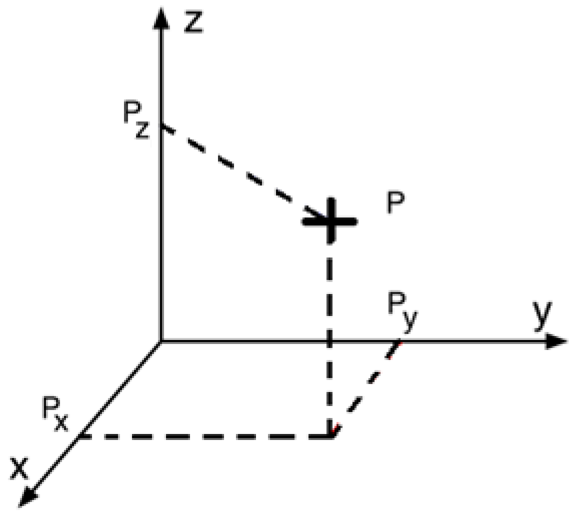
$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A *P* ponthoz tartozó vektor:

$$\underline{p} = p_x \underline{i} + p_y \underline{j} + p_k \underline{k}$$

A $\underline{p}$ vektor koordinátái a p_x, p_y, p_z skalárok.

Lineáris transzformáció: egy 3X3 dimenziójú mátrix (*A*) egy térbeli P ponthoz tartozó vektort ($\underline{p}$) egy másik vektorrá transzformál: $\underline{p}'=A\underline{p}$, általában megváltoztatva a vektor hosszát és irányítottságát is.

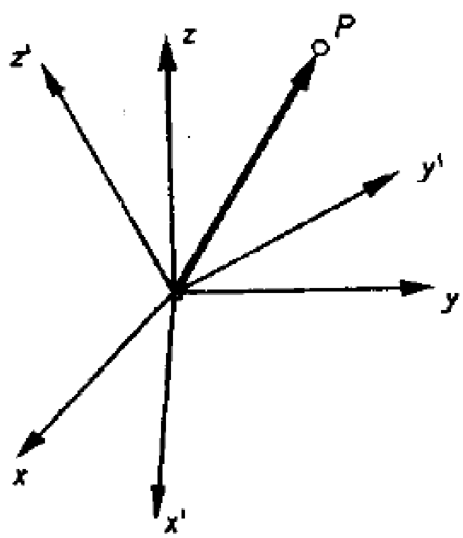


Orientáció leírása térben

A rotációs mátrix

Az orientáció,a pozíció mellett,egy véges kiterjedésű merev test térbeli elhelyezkedésének leírására szolgál egy referenciakoordináta-rendszerben. Az elhelyezkedés leírásához a testhez is hozzárendelünk egy koordinátarendszert (ez fixen rögzítve van a testhez), és a két koordinátarendszer relatív helyzetét mondjuk meg.

Legyen két koordináta rendszer (*K, K'*) amelyek közös origóval rendelkeznek. Legyen adva egy térbeli pont (*P*). Ismerve *P* koordinátáit *K*-ban, határozzuk meg *P* koordinátáit *K'*-ben.



Legyenek a *P* helyzetét megadó vektorok *K*-ban illetve *K'*-ben:

$$K: \underline{p} = p_x \underline{i} + p_y \ \underline{j} + p_z \underline{k}$$
$$K': \underline{p'} = p'_x \underline{i'} + p'_y \ \underline{j'} + p'_z \underline{k'}$$

Írjuk fel az *$\underline{i'}$, $\underline{j'}$, $\underline{k'}$* egységvektorokat a *K* koordinátarendszerben:

$$\underline{i'} = r_{ix} \underline{i} + r_{iy} \ \underline{j} + r_{iz} \underline{k}$$
$$\underline{j'} = r_{jx} \underline{i} + r_{jy} \ \underline{j} + r_{jz} \underline{k}$$
$$\underline{k'} = r_{kx} \underline{i} + r_{ky} \ \underline{j} + r_{kz} \underline{k}$$

Behelyettesítve a fenti transzformációt a *$\underline{p'}$* kifejezésébe, megkapjuk ennek a vektornak a pozícióját *K*-ban:

$$K: \underline{p'} = p'_x (r_{ix} \underline{i} + r_{iy} \ \underline{j} + r_{iz} \underline{k}) + p'_y \ (r_{jx} \underline{i} + r_{jy} \ \underline{j} + r_{jz} \underline{k}) + p'_z (r_{kx} \underline{i} + r_{ky} \ \underline{j} + r_{kz} \underline{k})$$

K-ban felírva a *$\underline{p'}$* megegyezik *$\underline{p}$*-vel:

$$p_x \underline{i} + p_y \ \underline{j} + p_k \underline{k} = p'_x (r_{ix} \underline{i} + r_{iy} \ \underline{j} + r_{iz} \underline{k}) + p'_y \ (r_{jx} \underline{i} + r_{jy} \ \underline{j} + r_{jz} \underline{k}) + p'_z (r_{kx} \underline{i} + r_{ky} \ \underline{j} + r_{kz} \underline{k})$$

Megfeleltetve az egységvektorok együtthatóit a fenti egyenlet jobb- és baloldalán, mátrix alakban kapjuk a koordináták között keresett összefüggést:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{ix} & r_{jx} & r_{kx} \\ r_{iy} & r_{jy} & r_{ky} \\ r_{iz} & r_{jz} & r_{kz} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix}$$

Az *R* mátrixot *rotációs mátrixnak* nevezzük. Az oszlopai tartalmazzák a *K'* egységvektorainak koordinátáit a *K*-ban. A rotációs mátrix egyértelműen definiálja a két, közös origóval rendelkező koordinátarendszer relatív helyzetét.

A rotációs mátrixok az alábbi *tulajdonságokkal* rendelkeznek:

- Két rotációs mátrix szorzata szintén egy rotációs mátrix

-*R* invertálható és

$$R^{-1} = R^T$$

- $\det(R)^2 = \det(R)\det(R^T) = \det(RR^T) = \det(I) = 1$,vagyis $\det(R) = \pm 1$.

Elemi forgatások

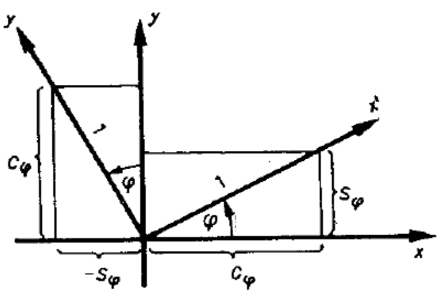
Keressük a rotációs mátrixok alakját azokban az esetekben, amikor *K'* koordinátarendszer csak egy tengely (*x* vagy *y* vagy *z*) körülvan elforgatva. Ebben az esetben síkbeli forgatásokról beszélünk, a koordinátatengelyre merőleges, origón áthaladó síkban végezzük az elforgatást.

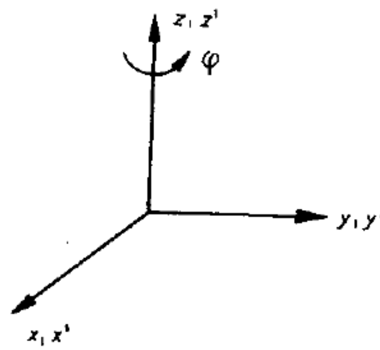
Forgatás z körül φ szöggel: az ábra alapján látszik, hogy az elforgatott koordinátarendszer egység-vektorai

$$\underline{i'} = \cos(\varphi)\underline{i} + \sin(\varphi)\,\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\underline{j'} = -\sin(\varphi)\,\underline{i} + \cos(\varphi)\,\underline{j} + 0\underline{k}$$

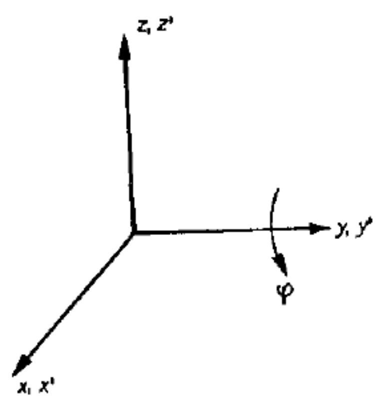
$$\underline{k'} = 0\underline{i} + 0\,\underline{j} + 1\underline{k}$$





Ennek alapján következik a rotációs mátrix:

$$rot(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

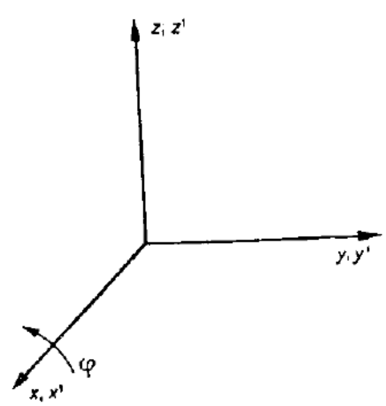


Forgatás y körül φ szöggel:

$$rot(y,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Forgatás x körül φ szöggel:

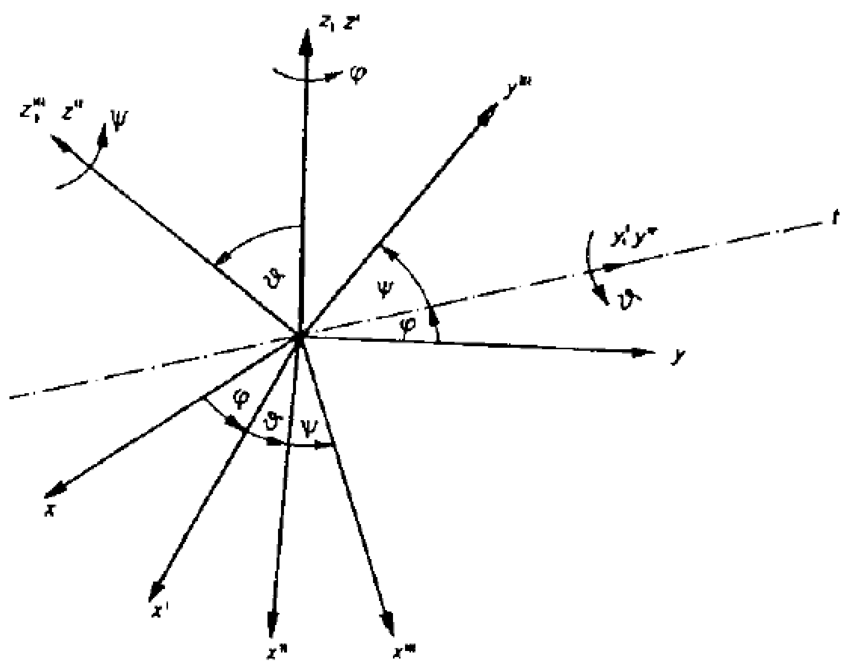
$$rot(x,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



Euler szögek

Látszik, hogy a síkbeli forgatás esetében a rotációs mátrix csak egy paramétertől (szögtől) függ. Általános térbeli forgatás esetében három szukcesszív elemi forgatás segítségéveleljuthatunk K-ból egy tetszőleges *K'''*-be (a két koordinátarendszer origója közös).

Euler szögek esetében először forgatunk az *z* tengely körül egy φ szöggel, majd az *y* tengely körülθszöggel és harmadik lépésként ismét az *z* körül ψ szöggel.



A forgatások geometriai leírása:

Legyen *t* az az egyenes, ahol metszik egymást az *x0y* és az *x'''0y'''* síkok.

I. elemi forgatás: forgatunk *z* körül, amíg *y* egybe esik *t*-vel. Ez lesz a φ szög. Az elforgatott koordinátarendszer lesz a *K'*.

II. elemi forgatás: Vegyük észre, hogy *z'* is és *z'''* is merőleges *y'* -ra (*t*-re). Forgassunk *y'*körül, amíg*z'*egybe esik z''' tengellyel. Ez lesz a θ szög. A kapott új koordináta rendszer lesz a *K''*.

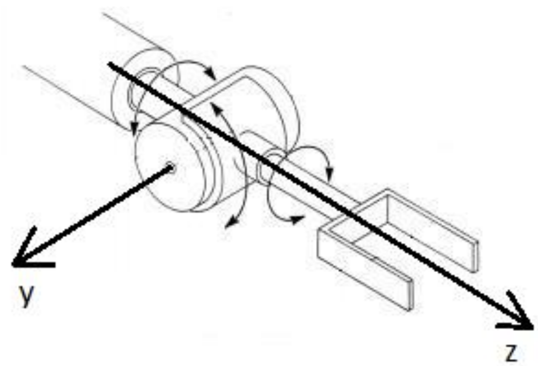
III. elemi forgatás: A *K'' és K'''* koordinátarendszer *z* tengelyei egybe esnek. Ennek megfelelően ahhoz, hogy megérkezzünk *K'''*-be a *z''* körül forgatjuk *K''*-t, amíg *y''* és *y'''* egybe nem esnek. Ez lesz a ψ szög.

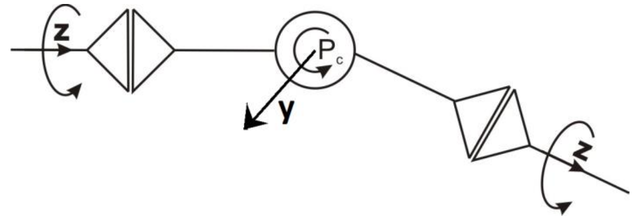
Az Euler szögeknek megfelelő rotációs mátrix:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_k \end{pmatrix} = rot(z,\varphi)\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = rot(z,\varphi)rot(y,\theta)\begin{pmatrix} p''_x \\ p''_y \\ p''_z \end{pmatrix} = \underbrace{rot(z,\varphi)rot(y,\theta)rot(z,\psi)}_{R_E}\begin{pmatrix} p'''_x \\ p'''_y \\ p'''_z \end{pmatrix}$$

$$R_E = \begin{pmatrix} C_\varphi C_\theta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\theta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\theta \\ S_\varphi C_\theta C_\psi + C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\theta S_\psi + C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{pmatrix}$$

*Euler robotkéz:*Számos három-szabadságfokú robotkéz felépítése követi az Euler szögek formalizmusát: az első és a harmadikkézcsuklók forgástengelyei megegyezik a csukló hossztengelyével (*z* tengely), a középső forgástengely pedig merőleges a hossztengelyre (*y* tengely).





Inverz feladat: Feltételezzük, hogy egy, a robotkézhez rendelt koordinátarendszerben megadjuk a céltárgyhoz rendelt koordinátarendszer egységvektorait. Az Euler szögek által definiált rotációs mátrix segítségével meghatározhatjuk a három robotcsukló előírt szögeit, amelyek biztosítják, hogy a csukló "ráforduljon" a céltárgyra. Legyen a céltárgyhoz rendelt koordinátarendszer egységvektorainak mátrixa a robotkézhez rendelt koordináta rendszerben:

$$R_G = \begin{pmatrix} r_{ixG} & r_{jxG} & r_{kxG} \\ r_{iyG} & r_{jyG} & r_{kyG} \\ r_{izG} & r_{jzG} & r_{kzG} \end{pmatrix}$$

A szögek számításához ($R_E = R_G$) például az alábbi egyenletrendszert oldhatjuk meg:

$$\cos(\theta) = r_{kzG}$$

$$\cos(\psi) = -\frac{r_{izG}}{\sin(\theta)}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{r_{kxG}}{\sin(\theta)}$$

Látszik, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $\sin(\theta)=0$, vagyis $\theta = 0, \pi, 2\pi ...$ (szingularitás probléma). Ezért ezt a csuklókonfigurációt érdemes elkerülni. Ez a helyzet Euler szögekkel definiált forgatás esetében akkor lép fel, ha *azés z'''* tengelyek egybe esnek. Az Euler szögekkel definiált mátrix az alábbi alakra redukálódik:

$$R_E = \begin{pmatrix} C_{\varphi+\psi} & -S_{\varphi+\psi} & 0 \\ S_{\varphi+\psi} & C_{\varphi+\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Ebben a pozícióban ($\sin(\theta)=0$) elveszítünk egy forgatási szabadságfokot, az első és harmadik elemi forgatásnak ugyanaz a hatása (a *gimbal lock* jelensége).

R-P-Y szögek

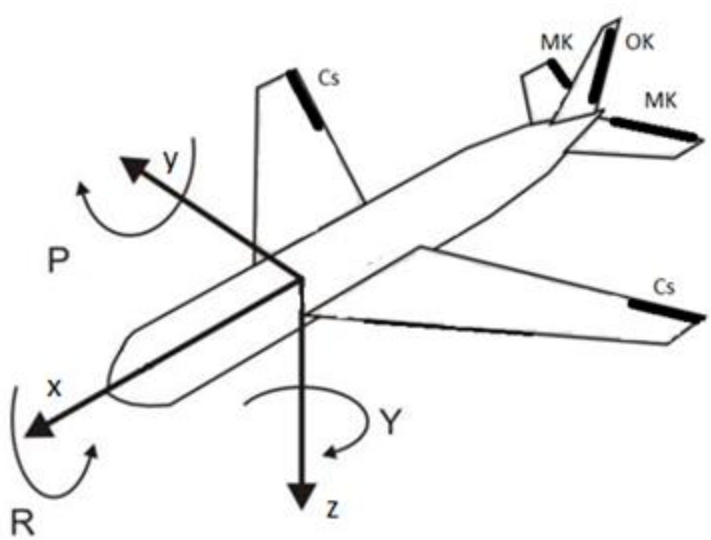
A Roll – Pitch – Yaw (Billenés – Bólintás - Elfordulás) szögek ugyancsak az orientáció jellemezésére alkalmas szöghármas. A robotika mellett alkalmazzák repülőgép- illetve hajóirányításban is. Ebben az esetben a szukcesszív forgatások sorozata az *x, y* és *z* tengelyek körül történik.

Repülőgépek esetében az irányváltásoknál ugyanezeket a szögeket alkalmazzuk:

-A Roll elfordulás (*x* körül) a csűrőlapok (Cs) ellentétes irányú kimozdításával történik.

- A Pitch elfordulás (*y'* körül) a magassági kormányfelületetek (MK) egyirányú kimozdításával történik.

- A Yaw elfordulás (*z''* körül) az oldal kormányfelület (OK) kimozdításával történik.



Az R-P-Y forgatások geometriai leírása: (Eljutás a K koordinátarendszerből egy tetszőleges K'''-be. A két koordinátarendszer origója közös)

I. elemi forgatás: forgatunk *x* körül, amíg *y* merőleges lesz *z'''*-re. Ez lesz a φ szög. Az elforgatott koordinátarendszer lesz a K'.

II. elemi forgatás: Vegyük észre, hogy *z'''* is és *z'* is merőleges *y'*-re. Forgassunk *y'*körül, amíg *z'* egybe esik *z'''* tengellyel. Ez lesz a θ szög. A kapott új koordináta rendszer lesz a *K''*.

III. elemi forgatás: A *K'' és K'''* koordinátarendszer *z* tengelyei egybe esnek. Ennek megfelelően ahhoz, hogy megérkezzünk *K'''*-be az*''* körül forgatjuk K''-t, amíg *y''* és *y''* egybe nem esnek. Ez lesz a ψ szög.

Az R-P-Y szögeknek megfelelő rotációs mátrix:

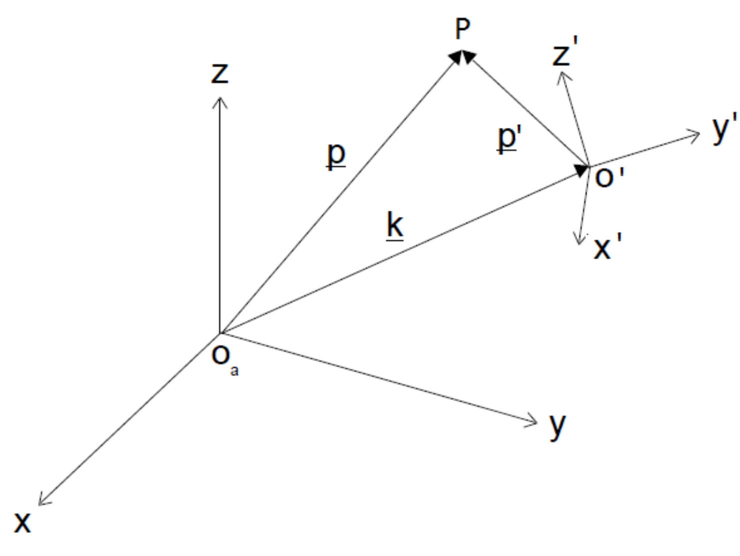
$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_k \end{pmatrix} = rot(x,\varphi)\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = rot(x,\varphi)rot(y,\theta)\begin{pmatrix} p''_x \\ p''_y \\ p''_z \end{pmatrix} = \underbrace{rot(x,\varphi)rot(y,\theta)rot(z,\psi)}_{R_{RPY}}\begin{pmatrix} p'''_x \\ p'''_y \\ p'''_z \end{pmatrix}$$

Akárcsak az Euler szögek esetében, az $R_E = R_G$ (ahol R_G adott rotációs mátrix) inverz feladat ugyancsak vezethet szinguláris megoldáshoz, fennáll a *glimbal lock* jelensége.

A homogén transzformáció

A térbeli pozíció és orientáció közös leírására szolgáló modell.

Legyen két koordináta rendszer (*K, K'*). Legyen egy adott térbeli pont (*P*). Ismerve *P* koordinátáit *K*-ban, határozzuk meg *P* koordinátáit *K'*-ben.



Legyenek a *P* helyzetét megadó vektorok *K*-ban illetve *K'*-ben:

$$K : \underline{p} = p_x \underline{i} + p_y \underline{j} + p_z \underline{k}$$
$$K' : \underline{p'} = p'_x \underline{i'} + p'_y \underline{j'} + p'_z \underline{k'}$$

A *K'* koordinátarendszer relatív pozícióját a *K'* origójának a pozícióvektorával a *K*-ban, valamint az *R* rotációs mátrixszal jellemezzük, amelynek oszlopai tartalmazzák a *K'* egységvektorainak koordinátáit a *K*-ban.

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} \mathrm{k_x} \\ \mathrm{k_y} \\ \mathrm{k_z} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{ix} & r_{jx} & r_{kx} \\ r_{iy} & r_{jy} & r_{ky} \\ r_{iz} & r_{jz} & r_{kz} \end{pmatrix}$$

A *P* ponthoz tartozó pozícióvektorok közötti összefüggés:

$$\underline{p} = \underline{k} + \underline{p}'$$
$$p_x \underline{i} + p_y \underline{j} + p_k \underline{k} = k_x \underline{i} + k_y \underline{j} + k_z \underline{k} + p'_x (r_{ix} \underline{i} + r_{iy} \underline{j} + r_{iz} \underline{k}) + p'_y (r_{jx} \underline{i} + r_{jy} \underline{j} + r_{jz} \underline{k}) + p'_z (r_{kx} \underline{i} + r_{ky} \underline{j} + r_{kz} \underline{k})$$

Az egyenlet jobb- és baloldalán megjelenő vektorok együtthatói közötti egyenlőségből következik a koordináták közötti összefüggés:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{ix} & r_{jx} & r_{kx} \\ r_{iy} & r_{jy} & r_{ky} \\ r_{iz} & r_{jz} & r_{kz} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}}_{\underline{k}}$$

A fenti összefüggés az alábbi mátrixos alakban is felírható:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{ix} & r_{jx} & r_{kx} & k_x \\ r_{iy} & r_{jy} & r_{ky} & k_y \\ r_{iz} & r_{jz} & r_{kz} & k_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

A 4X4 dimenziójú *T* mátrixot *homogén transzformációs mátrixnak* nevezzük és tartalmazza a rotációsmátrixot és a pozícióvektort is:

$$T = \begin{pmatrix} R & \underline{k} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

A homogén transzformációs mátrix az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
- Két homogén transzformációs mátrix szorzata szintén egy homogén transzformációs mátrix

$$T_1 T_2 = \begin{pmatrix} R_1 R_2 & \underline{k_2} + R_1 \underline{k_2} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

- A homogén transzformációs mátrix invertálható és az inverze:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R & \underline{k} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \underline{k} \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

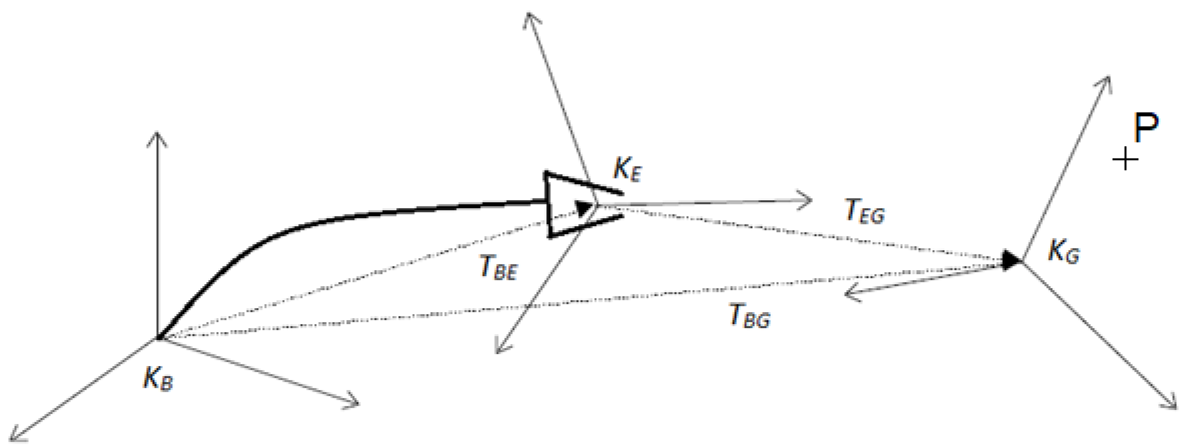
Alkalmazás (*Relatív koordinátatranszformáció*): Legyen egy robot bázisához rendelt koordinátarendszer K_B. Legyen a robot végberendezéséhez rendelt koordinátarendszer K_E. Legyen egy céltárgyhoz rendelt koordinátarendszer K_G. Ismert a K_E és K_G helyzete a bázis koordinátarendszerben (K_B-ben) amit a T_{BE} és T_{BG} homogén transzformációs mátrixok definiálnak. Keressük a céltárgy elhelyezkedését a robot végberendezéséhez képest, vagyis a T_{EG} homogén transzformációs mátrixot.

Legyen egy P térbeli pont amelynek K_B, K_E, K_G koordináta rendszerekben a vektorai: $\underline{p}_B$, $\underline{p}_E$, $\underline{p}_G$. Írjuk fel a vektorok koordinátái közötti összefüggéseket:

$$\underline{p}_B = T_{BE}\,\underline{p}_E$$
$$\underline{p}_E = T_{EG}\,\underline{p}_G$$
$$\underline{p}_B = T_{BG}\,\underline{p}_G$$

Ezek alapján kapjuk az eredményt:

$$\underline{p}_B = T_{BE}T_{EG}\,\underline{p}_G$$
$$T_{EG} = T_{BE}{}^{-1}T_{BG}$$



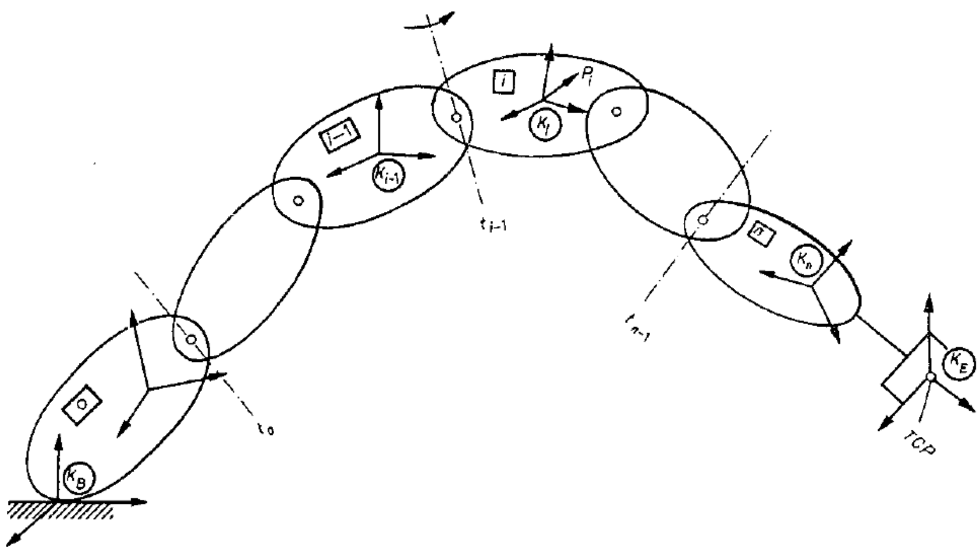
Robotok direkt geometriai feladata

A robot végberendezésének a térbeli elhelyezkedését keressük a robotbázisához képest. Ennek azért van jelentősége, mert általában a robot által mozgatott vagy megmunkálandó céltárgynak a térbeli helyét ugyancsak a robot bázisához képest adjuk meg. A térbeli elhelyezkedés leírásához ugyancsak a homogén transzformációs mátrixot alkalmazzuk. Ismertnek tekintjük a robot architektúráját, geometriai paramétereit valamint a robot csuklóinak a pozícióit (csuklóváltozók). A robotleírásához a Denavit-Hartenberg konvenciót használjuk.

Legyen egy merev, nyílt láncú, elágazás nélküli robotkar amelyben a szomszédos szegmenseket primitív csuklók (rotációs vagy transzlációs) kapcsolják össze.

Legyen egy K_B bázis koordinátarendszer,amelyben megadjuk a céltárgy elhelyezkedését. Rendeljünk a végberendezéshez egy K_E koordinátarendszert. K_E origója a TCP (Tool Center Point) szerszámközéppont, a végberendezés referenciapontja. Rendeljünk minden szegmenshez egy K_i koordinátarendszert (*i=0…n*). Tehát a robotnak *n+1* szegmense és *n* csuklója van.

Legyen a végberendezés egy *P* pontja, amelynek koordinátái K_E-ben: p_{xE}, p_{yE}, p_{zE}. Ugyanennek a pontnak a koordinátái a K_n koordináta rendszerben (T_{nE} a homogén transzformáció mátrixa az utolsó szegmens és a végberendezés között):



$$\begin{pmatrix} p_{xn} \\ p_{yn} \\ p_{zn} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{nE} \begin{pmatrix} p_{xE} \\ p_{yE} \\ p_{zE} \\ 1 \end{pmatrix}$$

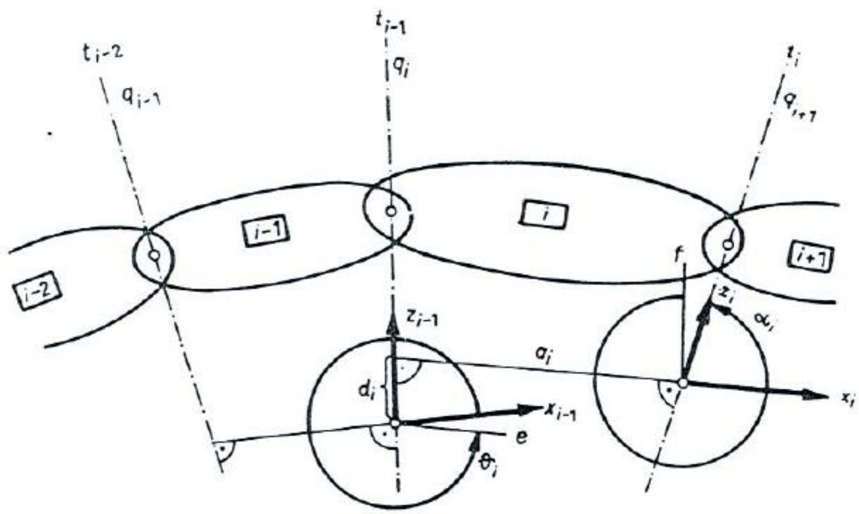
A *P* pont koordinátái a K_i koordináta rendszerben:

$$\begin{pmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{i,i+1} \dots T_{n-1,n} T_{mE} \begin{pmatrix} p_{xE} \\ p_{yE} \\ p_{zE} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A *P* pont koordinátái a K_B koordináta rendszerben:

$$\begin{pmatrix} p_{xB} \\ p_{yB} \\ p_{zB} \\ 1 \end{pmatrix} = T_{B0}T_{01}....T_{nE}\begin{pmatrix} p_{xE} \\ p_{yE} \\ p_{zE} \\ 1 \end{pmatrix}$$

A $T_{BE} = T_{B0}T_{01}....T_{nE}$ homogén transzformációs mátrix a robot végberendezésének az elhelyezkedését adja meg a báziskoordináta rendszerhez képest.



A Denavit-Hartenberg konvenció

Egy eljárás arra, hogy hogyan rendeljük hozzá a K_i koordináta rendszereket a szegmensekhez, illetve megadja a szukcesszív koordináta rendszerek közötti homogén transzformációs mátrixokat is a csuklóvátozók illetve a robot geometriai paramétereinek függvényében.

A *csuklótengely* (t_i) az az egyenes, amely mentén a robot csuklója elmozdul (prizmatikus csukló esetén) illetve amely körül elfordul (rotációs csukló esetén).

Koordináta rendszerek hozzárendelése a szegmensekhez: A K_i koordináta rendszert mindig a K_{i-1}-ik koordináta rendszerhez képest definiáljuk.

- A K_i koordinátarendszer z_i tengelye megegyezik a t_i tengellyel.

- Az x_i tengelyt úgy vesszük fel, hogy merőleges legyen z_i-re és z_{i-1}-re is.

- A K_i origója ott van, ahol x_i tengely metszi a t_i tengelyt.

Látszik, hogy K_0 esetében az x_0 tengelyt bárhogyan felvehetjük.

Az y_i tengely irányát a jobb kéz szabály adja.

Vegyük fel az alábbi egyeneseket:

- Legyen *e* az az egyenes, amely párhuzamos x_i-vel és áthalad K_{i-1} origóján

- Legyen *f* az az egyenes, amely párhuzamos z_{i-1} el és áthalad K_i origóján

Ezzel a koordináta rendszer hozzárendeléssel homogén transzformációs mátrix bármely K_{i-1} és K_i között 4 paramétertől függ. *A Denavit-Hartenberg paraméterek*:

- θ_i (*csuklószög*) az a szög, amellyel a z_{i-1}tengely körül el kell forgatni az x_{i-1} tengelyt, hogy az *e* egyenesbe kerüljön

- d_i (*csukló ofszet*) az a távolság, amellyel el kell tolni az *e* egyenest z_{i-1} mentén, hogy tengelybe kerüljön x_i-vel

- a_i (*szegmens hossz*) az a távolság, amellyel a z_{i-1} és x_i tengely metszéspontját el kell tolni x_i mentén, hogy K_i origójába kerüljön

- α_i (*szegmens csavarodás*) az a szög, amellyel az *f* egyenest el kell forgatni, hogy a z_i tengelybe kerüljön

Ha t_{i-1} és t_i párhuzamosak egymással, akkor a Denavit-Hartenberg konvenció alapján az 0_i origót bárhol felvehetjük a t_i-n. Ebben az esetben úgy érdemes megválasztani az origó helyét, hogy a homogén transzformációs mátrixnak egyszerűbb alakja legyen. Választhatunk például úgy, hogy a d_i paraméter *0* legyen. Ha t_{i-1} és t_i párhuzamosak az α_i paraméter *0*.

A Denavit-Hartenberg paraméterekkel definiálhatunk két elemi forgatást illetve két koordináta rendszer –tengely mentén történő eltolást, amivel eljuthatunk a K_{i-1} koordinátarendszerből a K_i koordinátarendszerbe:

$$T_{i-1,i} = Rot(z_{i-1},\theta_i)Tran(z_{i-1},d_i)Tran(x_i,a_i)Rot(x_i,\alpha_i)$$

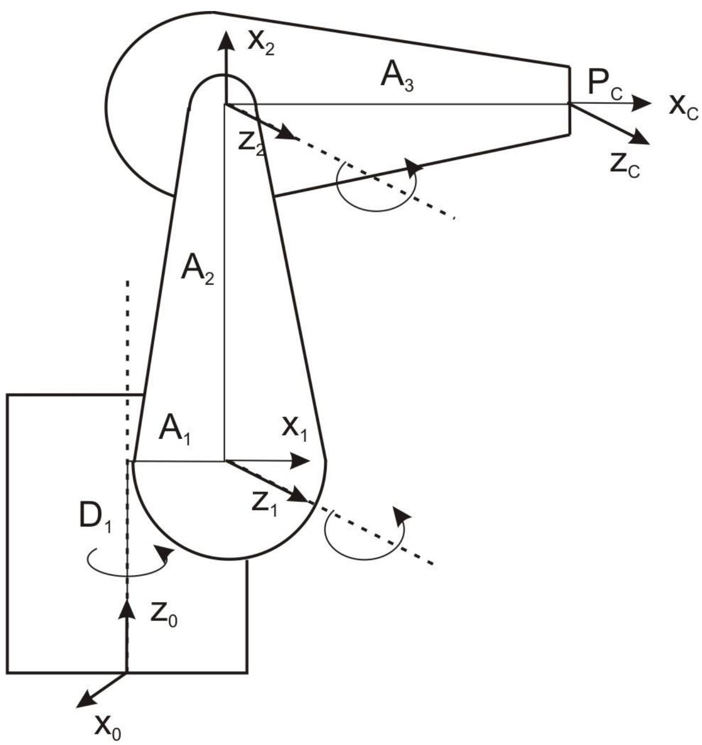
$$T_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A négy Denavit-Hartenber paraméter közül mindig egynek változhat az értéke a robot mozgása közben, ha primitív csuklókat feltételezünk. Rotációs csuklók esetében általában a változó θ_i (csukló szög), prizmatikus (transzlációs) csukló esetében pedig általában a_i (szegmens megnyúlás). Változó paraméterek a robot *csuklóváltozói (q_i)*. A teljes robotra a csuklóváltozók vektora: $\underline{q} = (q_1 \quad \dots \quad q_n)^T$.
A *robotok geometriai leírása* egy táblázat, amely tartalmazza egy robot összes szegmenséhez tartozó Denavit-Hartenberg paramétert. Megjelöljük a táblázatban azt is, hogy melyik paraméter a csuklóváltozó.

Link	θ_i	d_i	a_i	α_i	
1	*	*	*	*	$\underline{q} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$
…	*	*	*	*	
i	*	*	*	*	
…	*	*	*	*	
n	*	*	*	*	

A direkt geometriai feladat ($\underline{q} \rightarrow T_{0n}$): A robotok nem változó Denavit-Hartenberg paraméterei ismertek. Tehát amennyiben adottak a robot csuklóparaméterei ($\underline{q}$), felírhatjuk az összes $T_{i-1,i}$ homogén transzformációs mátrixot. Ezeket összeszorozva megkapjuk a T_{0n} homogén transzformációs mátrixot illetve a robot végberendezésének a térbeli elhelyezkedését a bázis koordinátarendszerhez képest.



Példa: Az ábrán az ipari robotok első három szabadságfokánál a gyakorlatban elterjedt architektúra látható. A robot Denavit-Hartenberg paramétereit az alábbi táblázat tartalmazza.

Link	θ_i	d_i	a_i	α_i	$\underline{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$
1	θ_1	D_1	A1	$-\pi/2$	
2	θ_2	0	A2	0	
3	θ_3	0	A3	0	

Inverz geometriai feladat

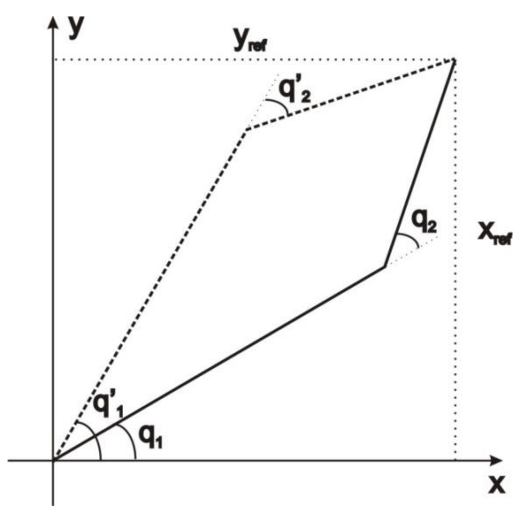
Inverz geometriai feladat esetében adott a robot végberendezésének pozíciója illetve orientációja és keressük a csuklóváltozókat ($\underline{q}$). Ugyancsak ismertnek tekintjük a robot nem változó Denavit-Hartenberg paramétereit.

A végberendezés előírt térbeli pozícióját a térbeli koordinátákkal adjuk meg egy bázis koordinátarendszerhez képest (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) az orientációt megadhatjuk például R-P-Y vagy Euler szögekkel (φ_{ref}, θ_{ref}, ψ_{ref}). Ezek alapján felírhatjuk az előírt homogén transzformációs mátrixot a bázis koordináta rendszer és a végberendezés között (T_{BEref}).

Az ismeretlen csuklóváltozók ($\underline{q}$) és a nem változó Denavit-Hartenberg paraméterek függvényében fel tudjuk írni *analitikusan* a homogén transzformációs mátrixot ($T_{BE}(\underline{q})$).

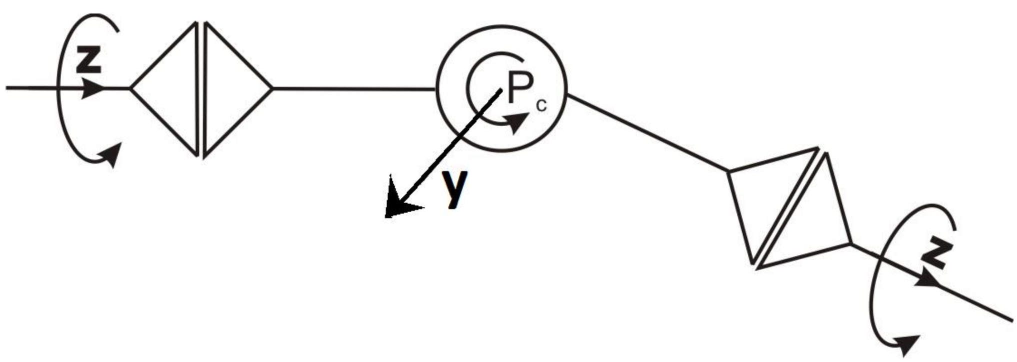
Tehát általánosan $\underline{q}$ a $T_{BE}(\underline{q})= T_{BEref}$ által adott egyenletrendszerből számítható.

Az iparban elterjedt hat szabadságfokú robotok esetében hat egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Problémát jelent, hogy általában a kapott egyenletrendszer nemlineáris, ezért explicit megoldás nehezen kapható. Ilyenkor numerikus módszereket alkalmazhatunk a nemlineáris egyenletrendszer megoldására. Törekedni kell az explicit megoldások meghatározára a numerikus egyenletrendszer-megoldó módszerek pontossági és konvergencia problémái miatt.



Sok esetben egy előírt pozícióra több csuklókonfiguráció is létezik. Ilyenkor azt a megoldást kell választani, amelyik távolabb van a munkatér határaitól, a szinguláris csuklókonfigurációktól valamint a munkatérben elhelyezkedő esetleges akadályoktól. Az ábrán egy két szabadságfokú kar két lehetséges csuklókonfigurációja látható ugyanahhoz az x_{ref}, y_{ref} előírt síkbeli végberendezés-pozícióhoz.

Inverz geometriai feladat megoldása dekompozícióval: Általában a hat szabadságfokú nyílt láncú ipari robotok $\underline{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6)^T$ első három csuklóváltozója a robot végberendezésének térbeli helyzetét állítják be (robotkar), a negyedik, ötödik, hatodik csuklóváltozó a végberendezés orientációjának beállításáért felelős (robotkéz). A hat-szabadságfokú robot homogén transzformációs mátrixa $T_{0,6} = T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3}T_{3,4}T_{4,5}T_{5,6}$ valamint adott az előírt pozíciót és orientációt megadó homogén transzformációs mátrix T_{ref}.



Elterjedt, hogy a robotkéz három csuklójának (a robot utolsó három csuklójának) a *csuklótengelyei egy ponton haladnak* át (például az ábrán látható Euler csukló esetében a *P_C pont*). Ebben az esetben az inverz geometriai feladat két háromcsuklós részfeladatra bontható fel.

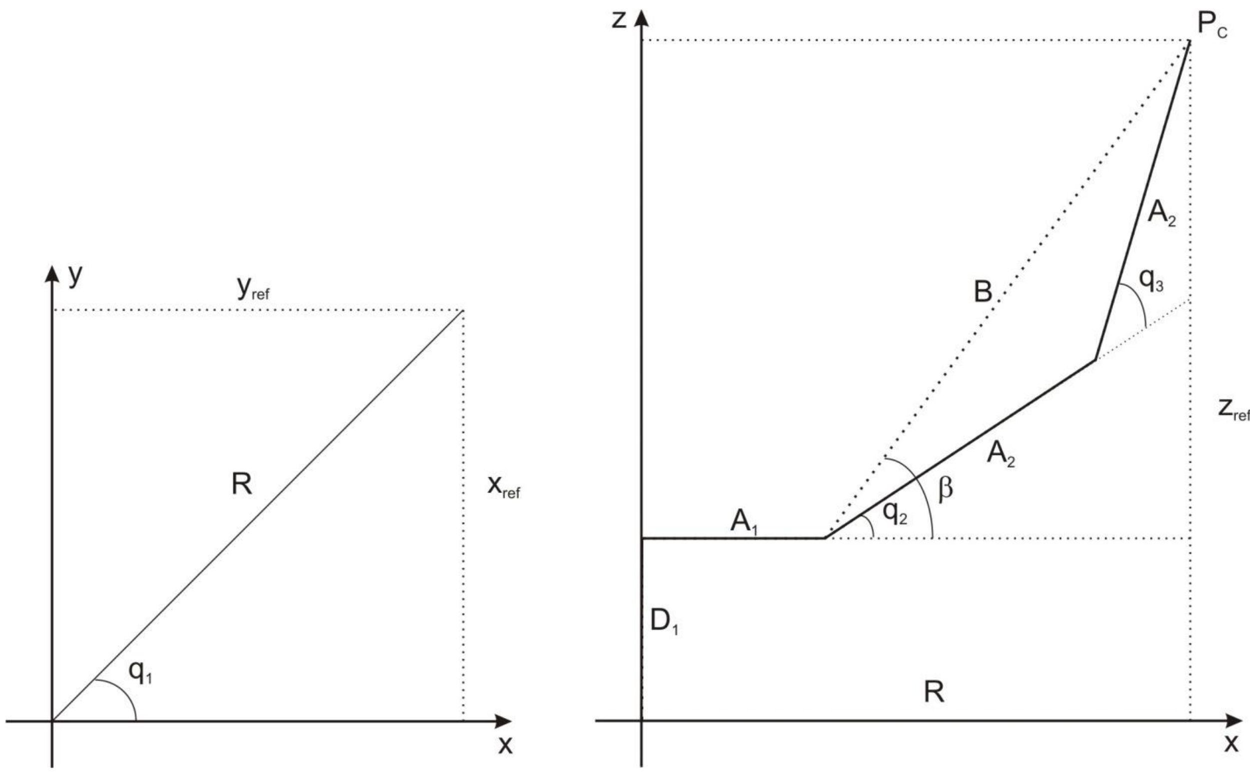
A P_c pont térbeli pozíciója meghatározható a végberendezés előírt térbeli pozíciója és orientációja alapján. Másrészt a P_c pont koordinátái csak az első három csuklóváltozótól függenek. Ezeket meghatározhatjuk három egyenlet alapján. Eredményként megkapjuk a q_1, q_2, q_3 csuklóváltozókat illetve a $T_{0,3} = T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3}$ transzformációt.

Amennyiben a robot kéz Euler kéz (vagy R-P-Y kéz) konfigurációjú és a *csuklótengelyei egy ponton haladnak* át, a $T_{4,6}$ transzformáció rotációs mátrixa megegyezik az Euler szögek (vagy R-P-Y szögek) rotációs mátrixával. A $T_{4,6} = T_{0,3}{}^{-1}T_{ref}$ egyenletből a rotációs mátrixokat kiemelve a q_4, q_5, q_6 meghatározása ugyanúgy történik, mint az Euler szögeknél bemutatott inverz feladat esetében.

Példa: Határozzuk meg az ábrán látható robot q_1, q_2, q_3 csuklóváltozóit, ha adott a harmadik szegmens végéhez rendelt koordinátarendszer (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) térbeli pozíciója.

A robot bázisához rendelt koordináta rendszer *x0y* síkjában meghatározhatjuk a q_1 szöget:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y_{ref}}{x_{ref}}\right)$$



Ugyaninnen számolhatjuk a robot kinyúlását a vízszintes síkban:

$$R = \sqrt{x_{ref}^2 + y_{ref}^2}$$

A bázishoz rendel koordináta rendszer *x0z* síkjában (az általánosság elveszése nélkül feltétetezzük, hogy a kinyúlás az *x* tengely mentén van) először meghatározzuk a β szöget valamint a *B* távolságot:

$$\beta = \arctan\left(\frac{z_{ref} - D_1}{R - A_1}\right)$$

$$B = \sqrt{\left(z_{ref} - D_1\right)^2 + \left(R - A_1\right)^2}$$

A q_2, q_3 csuklóváltozókat a koszinusz tétel segítségével határozhatjuk meg, az alábbi egyenletekből:

$$A_3^2 = A_2^2 + B^2 - 2A_2 B\cos\left(\beta - q_2\right)$$
$$B^2 = A_2^2 + A_3^2 - 2A_2 A_3 \cos\left(\pi - q_3\right)$$

Tehát:

$$q_2 = \beta - \arccos\left(\frac{A_2^2 + B^2 - A_3^2}{2A_2B}\right)$$

$$q_3 = \pi - \arccos\left(\frac{A_2^2 + A_3^2 - B^2}{2A_2A_3}\right)$$

A robotok kinematikája

A robot manipulátorok kinematikája robotok sebességét leíró modelleket tárgyalja. A legfontosabb kérdések ebben az esetben: Milyen sebességgel mozog a robot végberendezése a robot bázisához képest, ha a csuklók ismert sebességgel mozognak. Az inverz feladat a robotirányítások szempontjából fontos: határozzuk meg a csuklósebességeket a végberendezés előírt sebességkomponensei esetén.

Robotok Jacobi mátrixa

Legyen a csuklóváltozók vektora: $\underline{q} = (q_1 \quad \dots \quad q_n)^T$

A csuklósebességek vektorai, ha a csukló a $\underline{k}$ egységvektor mentén mozdul vagy fordul el ($\underline{k} = (0\ 0\ 1)^T$):

- prizmatikus csukló esetében (lineáris sebesség): $\dot{q}_i \underline{k}$

- rotációs csukló esetében (szögsebesség): $\dot{q}_i \underline{k}$

Feltételezzük, hogy ismert analitikus formában a végberendezés *x, y, z* koordinátája a bázis koordinátarendszerben a csuklóváltozók függvényében, valamint az elfordulások a bázis koordinátarendszerben a csuklóváltozók függvényében.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\underline{q}) \\ y(\underline{q}) \\ z(\underline{q}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{q}) \\ \theta(\underline{q}) \\ \psi(\underline{q}) \end{pmatrix}$$

A végberendezés sebessége és szögsebessége komponensei a csuklósebességek függvényében:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J_v \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J_\omega \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

A J_v és J_ω a robot sebesség illetve a szögsebesség Jacobi mátrixai. Méreteik *3Xn*.

A robot *J* Jacobi mátrixát e két mátrix alkotja, mérete *6Xn*:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J\underline{\dot{q}} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \underline{\dot{q}}$$

A Jacobi mátrix meghatározásánál a bázis és az *i*-ik szegmens közötti homogén transzformációs mátrixból indulunk ki, amelynek az elemei a csuklóváltozók függvényei:

$$T_{0,i} = \begin{pmatrix} r_{ixi}(\underline{q}) & r_{jxi}(\underline{q}) & r_{kxi}(\underline{q}) & k_{xi}(\underline{q}) \\ r_{iyi}(\underline{q}) & r_{jyi}(\underline{q}) & r_{kyi}(\underline{q}) & k_{yi}(\underline{q}) \\ r_{izi}(\underline{q}) & r_{jzi}(\underline{q}) & r_{kzi}(\underline{q}) & k_{zi}(\underline{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A *Jacobi mátrix lineáris sebességeket megadó része (J_v)* azt alkalmazhatjuk, hogy a végberendezés koordinátáit a bázis koordinátarendszerben a $T_{0,n}$ transzformáció pozícióvektorának elemei ($\underline{k}_n$) adják. Tehát a J_v meghatározásához ezt a vektort kell parciálisan deriválni az összes csuklóváltozó függvényében:

$$J_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{k}_{xn}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{k}_{xn}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \underline{k}_{yn}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{k}_{yn}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \underline{k}_{zn}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{k}_{zn}}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

A *Jacobi mátrix szögsebességeket megadó része (J_ω)* estében külön tárgyaljuk a prizmatikus (transzlációs) és a rotációs csuklókat:

- a prizmatikus (transzlációs) csuklók sebessége nem járul hozzá a végberendezés szögsebességéhez. Tehát, ha az *i*-ik csukló transzlációs, akkor a J_ω *i*-ik oszlopának elemei *0*-k.
- a rotációs csuklók esetében a Denavit-Hartenberg konvenció értelmében az *i*-ik robotszegmens elfordulása a z_{i-1} –ik tengely körül történik. Tehát az *i*-ik rotációs csukló által generált szögsebesség abszolút értéke $\dot{q}_i$, az irányvektorát pedig a $T_{0,i}$ homogén transzformációs mátrix (r_{kxi}, r_{kyi}, r_{kzi}) elemei adják.

A J_ω mátrixot az alábbi módon formálhatjuk:

$$J_\omega = \begin{pmatrix} \rho_1 r_{kx1} & \cdots & \rho_n r_{kxn} \\ \rho_1 r_{ky1} & \cdots & \rho_n r_{kxn} \\ \rho_1 r_{kz1} & \cdots & \rho_n r_{kxn} \end{pmatrix} \text{ ahol } \rho_i = \begin{cases} 0, \text{ha } i \text{ transzlációs} \\ 1, \text{ha } i \text{ transzlációs} \end{cases}$$

Inverz kinematikai feladat, szinguláris csuklókonfigurációk

Az inverz feladat esetében adott a végberendezés sebessége és szögsebessége a bázis koordináta rendszerben és keressük az ezeknek megfelelő csuklósebességeket. 6 szabadságfokú robotok esetében (a Jacobi mátrix négyzetes) az alábbi összefüggést alkalmazhatjuk:

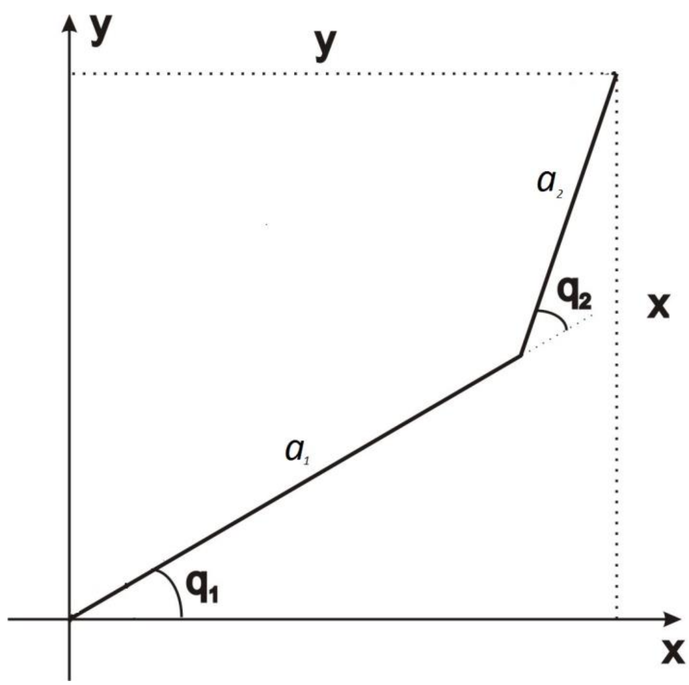
$$\underline{\dot{q}} = J^{-1}(q)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Látható, hogy mivel a Jacobi mátrix csuklópozíció függő, az összefüggés minden csuklópozícióra más értéket fog adni. Tehát a csuklók sebességei időben változóak lesznek akkor is, ha a robot végberendezésének az előírt sebessége konstans.

Példa: Legyen az ábrán látható két-szabadságfokú kar. Határozzuk meg a robot Jacobi mátrixát és annak inverzét adott $\underline{q}=(q_1\ q_2)^T$ csuklóváltozókra.
A végberendezés pozíciója az *x0y* bázis koordinátarendszerben:

$$x(\underline{q}) = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y(\underline{q}) = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)$$



Mivel a robot két szabadságfokú és síkbeli mozgást végez, a Jacobi mátrixból csak a v_x és v_y sebességkomponenseknek megfelelő részt emeljük ki.

A végberendezés sebességkomponensei a bázis koordináta rendszerben:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 = -(a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1+q_2))\dot{q}_1 - a_2\sin(q_1+q_2)\dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 = (a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1+q_2))\dot{q}_1 + a_2\cos(q_1+q_2)\dot{q}_2$$

Innen következik a Jacobi mátrix:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1\sin(q_1) - a_2\sin(q_1+q_2) & -a_2\sin(q_1+q_2) \\ a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1+q_2) & a_2\cos(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

A Jacobi mátrix determinánsa:

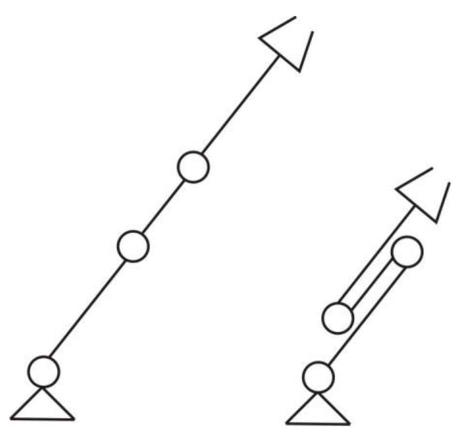
$$\det(J) = a_1 a_2 \sin(q_2)$$

A Jacobi mátrix inverze:

$$J^{-1} = \frac{1}{a_1 a_2 \sin(q_2)} \begin{pmatrix} a_2\cos(q_1+q_2) & a_2\sin(q_1+q_2) \\ -a_1\cos(q_1) - a_2\cos(q_1+q_2) & -a_1\sin(q_1) - a_2\sin(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Látszik, hogy $q_2=0,\pi,2\pi,\ldots$ értékekre a determináns 0, a Jacobi mátrix inverze nem értelmezett.

Általában ha det*(J(q*))=0*, akkor *q* szinguláris csuklókonfiguráció.* A Jacobi mátrix inverze nem számítható, vagyis ezekben a csuklópozíciókban adott végberendezés sebességhez nem tudunk csuklósebességet számolni. Ez azt jelenti, hogy a robot végberendezése a munkatér bizonyos irányaiba (*degenerált irányok*) a konstrukciójából adódóan nem képes elmozdulni. A szinguláris konfigurációk lehetnek a robot elméleti munkaterének határainál, de a munkatér belsejében is találkozhatunk szingulásir konfigurációkkal. Ilyen szinguláris konfigurációk láthatóak az ábrán három szabadságfokú kar esetén, amelyekben a degenerált irányokat a $\underline{d}$ irányvektorok jelölik. A szinguláris konfigurációk az ábrán: $\underline{q}^* = (q_1 \quad 0 \quad 0)^T$ és $\underline{q}^* = (q_1 \quad \pi \quad -\pi)^T$.



A végberendezés gyorsulásvektora ($\ddot{\underline{x}}$) tartalmazza a végberendezés lineáris és csuklógyorsulás komponenseit. A Jacobi mátrix segítségével ($\dot{\underline{x}} = J(\underline{q})\dot{\underline{q}}$) felírható a végberendezés gyorsulása és a csuklók gyorsulása közötti összefüggés:

$$\ddot{\underline{x}} = J(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + \frac{dJ}{dt}\dot{\underline{q}}$$

Ha a Jacobi mátrix négyzetes, akkor a nem szinguláris konfigurációkban az inverz feladat:

$$\ddot{\underline{q}} = J(\underline{q})^{-1}\left(\ddot{\underline{x}} - \frac{dJ}{dt}\dot{\underline{q}}\right)$$

Redundáns robotok inverz kinematikai feladata

Redundáns robotok esetében a robot szabadságfokainak a száma nagyobb, mint a munkatér dimenziója. Ennek következményeként Jacobi mátrix nem lesz négyzetes, a mátrixnak több oszlopa van, mint sora.

Legyen a kinetikai egyenlet:

$$\dot{\underline{x}} = J(\underline{q})\dot{\underline{q}}, \quad \dim(J(\underline{q})) = m \times n, m < n.$$

$\dot{\underline{x}}$ végberendezés sebességkomponenseinek vektora, $\dot{\underline{q}}$ a csuklósebességek vektora. $J(\underline{q})$ a Jacobi mátrix.

Ebben az esetben az inverz kinematikai feladat a végberendezés egy előírt sebességkomponens vektorára ($\dot{\underline{x}}$) végtelen sok csuklósebesség ($\dot{\underline{q}}$) megoldást ad. Ezek közül választhatjuk azt, amely minimális “energiával” képes garantálni az előírt végberendezés sebességet.

A feladatot megfogalmazhatjuk korlátos optimizálási feladatként: keressük úgy a $\dot{\underline{q}}$ csuklósebességeket, hogy az

$$F(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T\dot{\underline{q}}$$

költségfüggvénynek minimuma legyen. Az optimizálási feladatnak a megszorítása az $J(\underline{q})\dot{\underline{q}} - \dot{\underline{x}} = 0$ egyenlet. A feladat megoldásához alkalmazzuk a Lagrange multiplikátor szabályt. Definiáljuk a Lagrange függvényt:

$F(\dot{\underline{q}}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T\dot{\underline{q}} + \underline{\lambda}^T\left(J(\underline{q})\dot{\underline{q}} - \dot{\underline{x}}\right)$ ahol $\underline{\lambda}$ a Lagrange multiplikátor.

A Lagrange függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{q}}} = \dot{\underline{q}} + J(\underline{q})^T\underline{\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\lambda}} = J(\underline{q})\dot{\underline{q}} - \dot{\underline{x}}$$

A Lagrange függvény szélsőértékeinek számítása:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\underline{q}}} = \underline{0},\ \ \dot{\underline{q}} = -J(\underline{q})^T \underline{\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{0},\ \ J(\underline{q})\dot{\underline{q}} - \dot{\underline{x}} = 0$$

$$-J(\underline{q})\underline{J(\underline{q})^T \underline{\lambda}} - \dot{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda} = -\left(J(\underline{q})J(\underline{q})^T\right)^{-1}\dot{\underline{x}}$$

Tehát az inverz kinematikai feladat optimális megoldása:

$$\dot{\underline{q}} = J(\underline{q})^T\left(J(\underline{q})J(\underline{q})^T\right)^{-1}\dot{\underline{x}}$$

Irányítás kinematikai modell alapján

Az irányítási feladat célja, hogy a végberendezés pozíciója ($\underline{x}$) kövessen egy adott térbeli pályát ($\underline{x}_{ref}$). A pályavektor dimenziója megegyezik a munkavektor dimenziójával. A pályavektort minden koordináta mentén egy deriválható időfüggvénynek tekintjük: $\underline{x}_{refi} = x\,\underline{x}_{refi}(t),\ i=1\ldots N$.

Az irányítási algoritmus a robot csukló-beavatkozóinak számolja ki a vezérlőjeleket ($\underline{u}$). Az irányításhoz felhasznált mérések a csuklópozíciók ($\underline{q}$) és csuklósebességek ($\dot{q}$).

A robotok Jacobi mátrixa (J) megadja az összefüggést a csuklósebességek és a végberendezés sebessége között. Feltételezzük, hogy a Jacobi mátrix négyzetes, vagyis a robot szabadságfoka megegyezik a munkatér dimenziójával (*DOF = M*).

A kinematikai modellen alapuló irányítás nem veszi figyelembe a robotra ható erőket, nyomatékokat, amelyek hatása nagy sebességeken kihangsúlyozottabb. Ezért ezt az irányítási módszert csak alacsony sebességtartományban lehet alkalmazni.

Az irányítás lépései:

- Az előírt végberendezés pozíció ($\underline{x}_{ref}$) és a mért végberendezés pozíció ($\underline{x}$) függvényében meghatározzuk a végberendezés előírt sebességét (pozíciószabályozás). A végberendezés pozíciót a csuklópozíció alapján számítjuk a direkt geometriai feladatot alkalmazva.
- A végberendezés előírt sebessége alapján, a Jacobi mátrix segítségével, kiszámítjuk az előírt csuklósebességeket ($\dot{\underline{q}}_{ref}$).

- Az előírt csuklósebességek és a mért csuklósebességek alapján kiszámítjuk a vezérlőjeleket a beavatkozóknak.

Mind a pozíció, mind a sebességszabályozó esetében PI szabályozót alkalmazunk a nem-modellezett bizonytalanságok és a nem mért zavarok (például alacsony sebességtartományban fellépő dinamikus erőhatások) elnyomására.

A pozíciószabályozás tervezése:

A tervezéshez a robot kinematikai modelljéből indulunk ki:

$$\underline{\dot{x}} = J(\underline{q})\underline{\dot{q}}$$

Legyen adva az előírt végberendezés sebesség és pozíció: $\underline{x}_{ref}$, $\underline{\dot{x}}_{ref}$.

Feltételezzük, hogy J invertálható. Válasszuk a pozíciószabályozót az alábbi formában:

$$\underline{\dot{q}} = J(\underline{q})^{-1}\left(\underline{\dot{x}}_{ref} + K_P(\underline{x}_{ref} - \underline{x}) + K_I\int_0^t(\underline{x}_{ref} - \underline{x})d\xi\right) \quad (*)$$

Ezzel az irányítással a robot végberendezés pozíciójának dinamikája:

$$\underline{\dot{x}} = J(\underline{q})J(\underline{q})^{-1}\left(\underline{\dot{x}}_{ref} + K_P(\underline{x}_{ref} - \underline{x}) + K_I\int_0^t(\underline{x}_{ref} - \underline{x})d\xi\right)$$

K_P és K_I diagonális mátrixok, amelyeknek a diagonális elemei szigorúan pozitívak:
K_P = diag$(k_{P1} \ldots k_{PM})$, $k_{Pi} > 0$, K_I = diag$(k_{I1} \ldots k_{IM})$, $k_{Ii} > 0$

Legyen a pozíciószabályozási hiba: $\underline{e} = \underline{x}_{ref} - \underline{x}$. Ezzel a jelöléssel az irányított végberendezésének dinamikája az i-ik koordináta mentén:

$$\ddot{e}_i + k_{Pi}\dot{e}_i + k_{Ii}e = 0$$

A k_{Pi}-t és a k_{Ii}-t úgy kell megválasztani, hogy a fenti homogén differenciálegyenlet stabil legyen, vagyis az összes pólusának a valós része negatív legyen.

A sebességszabályozó:

A (*) összefüggéssel kiszámított beavatkozó jelet a sebességszabályozó előírt értékének használhatjuk ($\underline{\dot{q}}_{ref}$). A sebességszabályozáshoz ugyancsak PI szabályozót alkalmazhatunk, feltételezve, hogy a robot csuklósebességei mérhetőek.

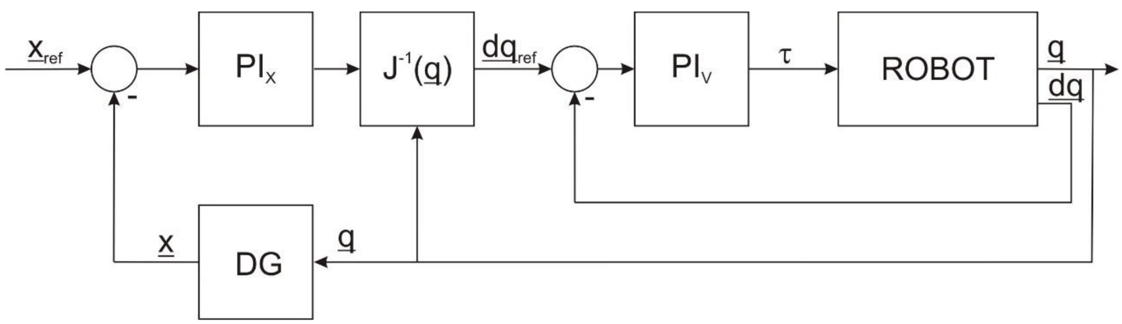
$$\underline{u} = K_{PV}(\underline{\dot{q}}_{ref} - \underline{\dot{q}}) + K_{IV}\int_0^t (\underline{\dot{q}}_{ref} - \underline{\dot{q}})d\xi$$

K_{PV} és K_{IV} diagonális mátrixok, amelyeknek a diagonális elemei szigorúan pozitívak

Itt $\underline{u}$ a robot beavatkozóinak a vezérlőjel-vektorát jelöli.

Az irányítás tömbrajza az alábbi ábrán látható. Látszik, hogy a kinematikai modellen alapuló szabályozó tulajdonképpen egy kaszkád-szabályozó külső pozíciószabályozási és belső sebességszabályozási hurokkal.

A *DG* blokk a robot direkt geometriai feladatát implementálja: a mért csuklópozíció ($\underline{q}$) alapján kiszámítja a végberendezés pozícióját ($\underline{x}$).



Ábra: Kinematikai modellen alapuló robotirányítási rendszer tömbrajza.

Az irányítási algoritmus összefoglalása:

IN: $\underline{q}$, $\underline{\dot{q}}$, $\underline{x}_{ref}$, $\underline{\dot{x}}_{ref}$

$\mathrm{PI_X}$ + J: $$\underline{\dot{q}}_{ref} = J(\underline{q})^{-1}\left(\underline{\dot{x}}_{ref} + K_P(\underline{x}_{ref} - \underline{x}) + K_I\int_0^t (\underline{x}_{ref} - \underline{x})d\xi\right)$$

$\mathrm{Pi_V}$: $$\underline{u} = K_{PV}(\underline{\dot{q}}_{ref} - \underline{\dot{q}}) + K_{IV}\int_0^t (\underline{\dot{q}}_{ref} - \underline{\dot{q}})d\xi$$

OUT: $\underline{u}$

Látszik, hogy az irányítás megvalósításához a Jacobi mátrix invertálható kell, hogy legyen. Ezért a robot pályáját úgy kell megtervezni, hogy a mozgó, irányított robot elkerülje a szinguláris konfigurációkat, ahol *det(J)=0*.