Véges beállási idejű szabályozás

Mintavételes lineáris rendszereknél elérhető, hogy a szabályozási hiba ne csak exponenciálisan csökkenve tartson a nullához, hanem véges számú mintavételi periódus alatt egzaktul nullává váljon.
A szabályozó tervezésénél feltételezzük, hogy az alapjel egységugrás-szerű. A szabályozó struktúráját, paramétereit úgy keressük, hogy a *zárt rendszer véges impulzusválaszú* (*FIR - Finite Impulse Resposnse*) legyen.
Az *n*-ed fokszámú FIR rendszer alakját általában z^{-1}-ben adjuk meg:

$$H_{FIR}(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots a_n z^{-n} \tag{8.48}$$

Átírva *z*-be kapjuk, hogy:

$$H_{FIR}(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{z^n} \tag{8.49}$$

Látszik, hogy a FIR rendszer kauzális, *n* darab pólusa van a zéróban. Mintavételes rendszerek esetén a zéróhoz közeli pólusok kis időállandókat jelentenek, vagyis ezek rendszerek gyors válaszúak. A zérus pólusokat abszolút gyors pólusoknak nevezzük.
A gyors válasz csak úgy érhető el, hogy ha a szabályozás első mintavételeiben, vagy az alapjel megváltozásakor a beavatkozó jel nagy értékeket vesz fel. A beavatkozók bemenete csak véges nagyságú értéket vehet fel, ezért célszerű már a szabályozótervezés szintjén garantálni, hogy a szabályozás első mintavételében a beavatkozó jel korlátos legyen.
Időtartományban a FIR rendszereket az alábbi módon kapjuk (*y* – kimenet, *r* - bemenet):

$$H_{FIR}\left(z^{-1}\right) = \frac{y\left(z^{-1}\right)}{r\left(z^{-1}\right)} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}$$

$$y\left(z^{-1}\right) = a_0 r\left(z^{-1}\right) + a_1 r\left(z^{-1}\right) z^{-1} + a_2 r\left(z^{-1}\right) z^{-2} + \ldots + a_n r\left(z^{-1}\right) z^{-n}$$

$$y_k = a_0 r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} + \ldots + a_n r_{k-n} \tag{8.50}$$

8.2 Példa: Legyen az alábbi FIR rendszer

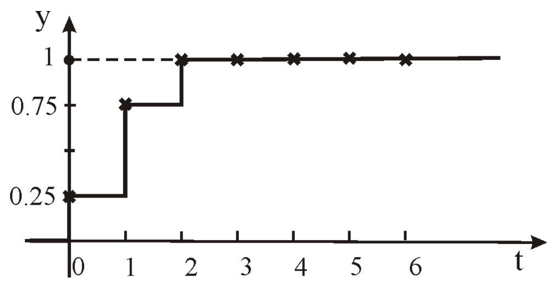
$$H_{FIR}(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} \tag{8.51}$$

Határozzuk meg a rendszer egységugrásra adott válaszát az első 4 mintavételben.

A mintavételes egységugrás jelnek a $k=0$ és azutáni összes mintavételben az értéke 1, a $k=0$ előtti mintavételekben az értéke 0.
Alkalmazva a (8.50) összefüggést, kapjuk:

$$y_0 = \frac{1}{4}r_0 + \frac{1}{2}r_{-1} + \frac{1}{4}r_{-2} = \frac{1}{4}$$
$$y_1 = \frac{1}{4}r_1 + \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{4}r_{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{4}$$
$$y_2 = \frac{1}{4}r_2 + \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{4}r_0 = 1$$
$$y_3 = \frac{1}{4}r_3 + \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{4}r_1 = 1$$
$$y_4 = \ldots = y_{546127} = 1$$

A rendszer kimenete 3 mintavétel alatt egzaktul eléri az állandósult állapotot, ami jelen esetben 1 (lásd 8.16 Ábra).



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.1 Ábra: FIR rendszer egységugrásra adott válasza**

Könnyen belátható, hogy általában a FIR rendszer bemenete egységugrásra az együtthatók összegéhez konvergál: $\sum_{i=0}^{n} a_i$. Irányítástechnikai alkalmazásoknál a cél, hogy egységugrás alapjelre a folyamat kimenet 1 legyen, ezért a dead-beat szabályozó tervezéséhez a referenciarendszerként választandó FIR rendszer együtthatóinak összege 1 kell legyen.

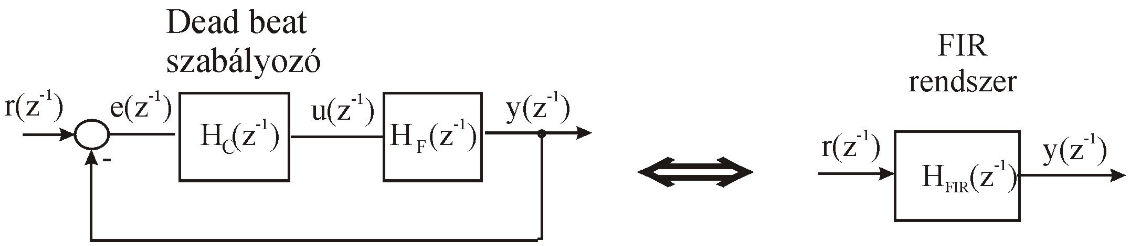
Tehát a dead – beat szabályozó tervezésénél az alábbi követelményekből indulunk ki:

I. A zárt rendszer FIR rendszer legyen (lásd 8.17 Ábra), amelynek az együtthatói kielégítik az alábbi feltételt:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = 1 \tag{8.52}$$

II. A beavatkozó jel értékére a *k=0* mintavételben korlátos legyen adott u_{MAX} korláttal:

$$|u_k| \le u_{MAX}, \text{ ha } k = 0 \tag{8.53}$$



Hiba! Nincs ilyen stílusú szöveg a dokumentumban.**.2 Ábra: A dead-beat szabályozó tervezése**

Legyen adott az irányított folyamatot leíró mintavételes modell:

$$H_F\left(z^{-1}\right)=\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_m z^{-n}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_n z^{-n}} \tag{8.54}$$

Mivel a zárt rendszer FIR rendszer kell, hogy legyen, ezért z^{-1} -ben a rendszer átvitelét egy polinom adja. Legyen ez a $K(z^{-1})$ polinom:

$$\underbrace{K\left(z^{-1}\right)}_{=k_0+k_1 z^{-1}+\ldots}=\frac{y(z^{-1})}{r(z^{-1})}=\frac{H_C(z^{-1})\cdot H_F(z^{-1})}{1+H_C(z^{-1})\cdot H_F(z^{-1})} \tag{8.55}$$

Ahhoz, hogy a zárt rendszer FIR legyen, vagyis konstans alapjelre a kimenet véges számú mintavétel után ne változzon, az szükséges, hogy a szabályozó kimenete - a beavatkozó jel – se változzon. Tehát az átvitel az alapjelről a beavatkozó jelre is FIR rendszer legyen. Legyen ez az $M(z^{-1})$ polinom. A 8.17 Ábra alapján kapjuk:

$$\underbrace{M\left(z^{-1}\right)}_{=m_0+m_1 z^{-1}+\ldots}=\frac{u(z^{-1})}{r(z^{-1})}=\frac{H_C(z^{-1})}{1+H_C(z^{-1})\cdot H_F(z^{-1})} \tag{8.56}$$

Elosztva a K és M polinomokat kapjuk:

$$\frac{K\left(z^{-1}\right)}{M\left(z^{-1}\right)}=H_F\left(z^{-1}\right)=\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)} \tag{8.57}$$

Tehát bármely $L(z^{-1})$ nemzérus polinomra igaz, hogy:

$$\frac{K\left(z^{-1}\right)}{M\left(z^{-1}\right)}=\frac{L\left(z^{-1}\right)}{L\left(z^{-1}\right)}\cdot\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)} \tag{8.58}$$

A (8.58) összefüggés alapján a K és M polinomok az alábbi alakban kereshetőek:

$$\begin{cases} K(z^{-1})=L(z^{-1})\cdot B(z^{-1}) \\ M(z^{-1})=L(z^{-1})\cdot A(z^{-1}) \end{cases} \tag{8.59}$$

A (8.56) összefüggés alapján a dead-beat szabályozót az L polinom függvényében az alábbi alakban kapjuk:

$$H_C(z^{-1}) = \frac{M(z^{-1})}{1 - M(z^{-1}) \cdot H_F(z^{-1})} = \frac{L(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})}{1 - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \cdot L(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})} = \frac{L(z^{-1}) \cdot A(z^{-1})}{1 - L(z^{-1}) \cdot B(z^{-1})} \tag{8.60}$$

Mivel az A és B polinomok ismertek a folyamatot leíró modellből, az L polinomot kell meghatározni a szabályozó átviteli függvényéhez. Mivel két feltételünk van a szabályozótervezéshez, válasszuk az L polinomot elsőfokúnak, tehát olyan polinomnak, amelynek két paramétere van:

$$L(z) = l_0 + l_1 z^{-1} \tag{8.61}$$

Az *I.* feltétel alapján a zárt rendszert leíró polinom együtthatóinak összege 1 (lásd (8.52) összefüggés), tehát $K(1)=1$. A (8.59) összefüggés alapján:

$$K(1) = L(1) \cdot B(1) = 1 \Rightarrow L(1) = \frac{1}{B(1)} \Rightarrow \quad l_0 + l_1 = \frac{1}{\sum b_i} \tag{8.62}$$

A *II.* feltétel alapján a beavatkozó jel a *0*-ik mintavételben u_{MAX}. A (8.56) összefüggés alapján, ha r egységugrás:

$$\begin{aligned} u(z^{-1}) &= M(z^{-1}) \cdot r(z^{-1}) \\ u_k &= m_0 r_k + m_1 r_{k-1} + m_2 r_{k-2} + \ldots + m_r r_{k-r} \end{aligned} \tag{8.63}$$

$$u_0 = m_0 \underbrace{r_0}_{=1} + m_1 \underbrace{r_{-1}}_{=0} + \ldots + m_r \underbrace{r_{-r}}_{=0} \tag{8.64}$$

Tehát a (8.64) összefüggés alapján a beavatkozó jel a $k=0$ mintavételben (u_0) egyenlő az M polinom szabadtagjával (m_0). Ugyanakkor a (8.59) összefüggés alapján ($M = L \cdot A$):

$$m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \ldots = (l_0 + l_1 z^{-1}) \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots) \tag{8.65}$$

A (8.64) és (8.65) összefüggések alapján:

$$\begin{cases} m_0 = l_0 \cdot a_0 \\ m_0 = u_0 = u_{MAX} \end{cases} \Rightarrow u_{MAX} = l_0 \cdot a_0 \tag{8.66}$$

A (8.66) és (8.62) összefüggések alapján kapjuk az L polinom két együtthatóját:

$$\begin{cases} l_0 = \dfrac{u_{MAX}}{a_0} \\ l_0 + l_1 = \dfrac{1}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} \Rightarrow \quad l_1 = \dfrac{1}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} - l_0 \end{cases} \tag{8.67}$$

Az *L* polinom ismeretében a (8.60) összefüggés alapján kapjuk a dead - beat szabályozót, amely kielégíti az *I.* és *II.* feltételeket.

A szabályozó tervezésénél feltételeztük, hogy a maximális beavatkozó jelet a $k=0$ mintavételben kapjuk. Ugyanakkor, ha a mintavételi periódust túl kicsire választjuk előfordulhat, hogy a szabályozó által kiszámított beavatkozó jel a $k=1$ vagy azutáni mintavételben nagyobb lesz, mint u_{MAX}. Ez azért történhet meg, mert kis mintavétel miatt túl gyors választ várunk el a rendszertől, ami nem csak a legelső mintavételben eredményezhet nagy beavatkozó jelet. Ezért a mintavétel megválasztásánál szimulációval kell ellenőrizni a beavatkozó jel nagyságát a szabályozási tranziens alatt és ha azt tapasztaljuk, hogy a $k=1$ vagy azutáni mintavételekben a beavatkozó jel nagyobb mint u_{MAX}, akkor nagyobb mintavételi periódust kell választani.