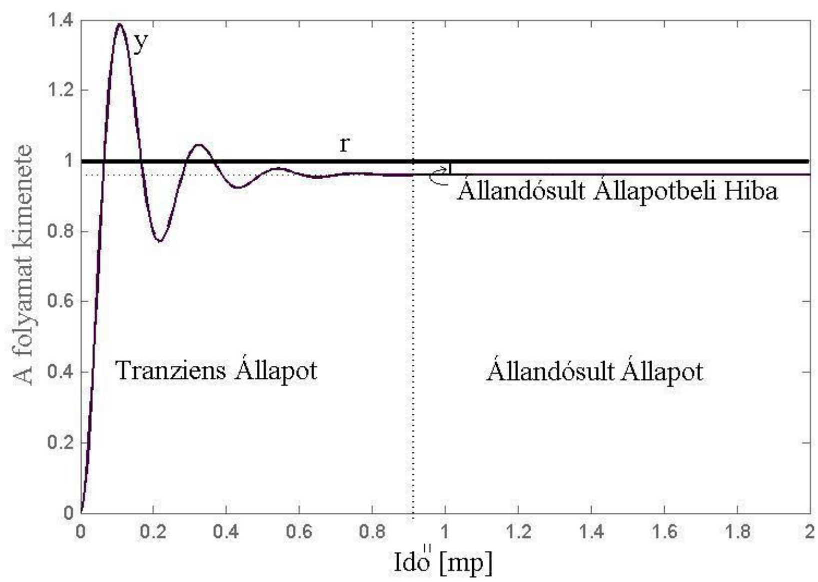
4. A szabályozás hatása az állandósult állapotra

A szabályozás indításakor, ha az alapjel és a folyamat kimenete között eltérés van, a szabályozó által kiadott beavatkozó jel a folyamat kimenetét módosítja, hogy a szabályozási hiba minél kisebb legyen. Ha a szabályozott (zárt) rendszer stabil, a szabályozási hiba konstans értékhez fog konvergálni. Stabil szabályozási rendszerek esetén állandósult állapotnak nevezzük a tranziensek lecsengése utáni állapotot. *Állandósult állapotbeli hiba* szabályozási rendszerek esetén az alapjel és a kimenet közötti különbség állandósult állapotban (lásd 4.1 Ábra). A szabályozóval biztosítható, hogy a folyamat kimenetének állandósult állapot előtti, tranziens viselkedést módosítsuk (például túllövés-mentes választ vagy gyorsabb választ kapjunk). Ugyanennyire fontos feladat, hogy *hogyan válasszuk meg a szabályozó struktúráját, paramétereit úgy, hogy az állandósult állapotbeli hiba nulla, vagy minél kisebb legyen.*

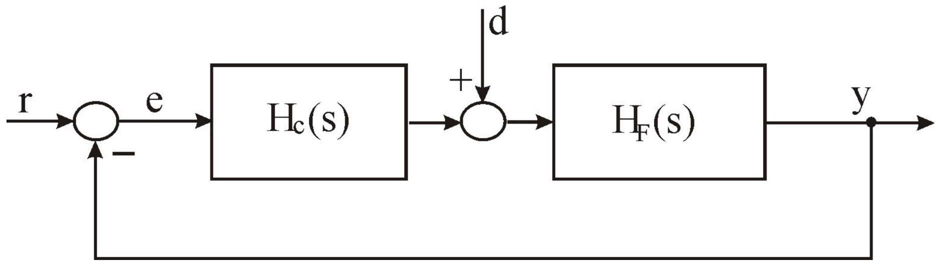


4.1 Ábra: Állandósult állapotbeli hiba

Elméletileg a rendszerek válaszában $t=\infty$ ideig tart a tranziensek hatása. A gyakorlatban azonban, amikor a mérési pontosság meghaladja a tranziens viselkedés nagyságrendjét (például másodfokú lengőrendszer esetében a lengések amplitúdója), állandósult állapotról beszélünk. Az állandósult állapotbeli hiba számításához a Laplace transzformált alábbi tulajdonsága alkalmazható:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} se(s) \tag{4.1}$$

Feltételezzük, hogy a vizsgált irányítási rendszerben az alapjel (r) bemenet mellett bemeneti zaj (d) is lehet, így a szabályozási hibát (e) nem csak az alapjel változása, hanem a bemeneti zaj változása is módosíthatja (lásd 4.2 Ábra). A továbbiakban megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja az alapjel megváltozása (*alapjel követés*), valamint a bemeneti zaj megváltozása (*zajelnyomás*) az állandósult állapotbeli hibát. Feltételezve, hogy a szabályozó is és az irányított folyamat is lineáris rendszer, a két bemenet (alapjel, zaj) hatása összeadódik.



4.2 Ábra: Szabályozási rendszer bemeneti zajjal

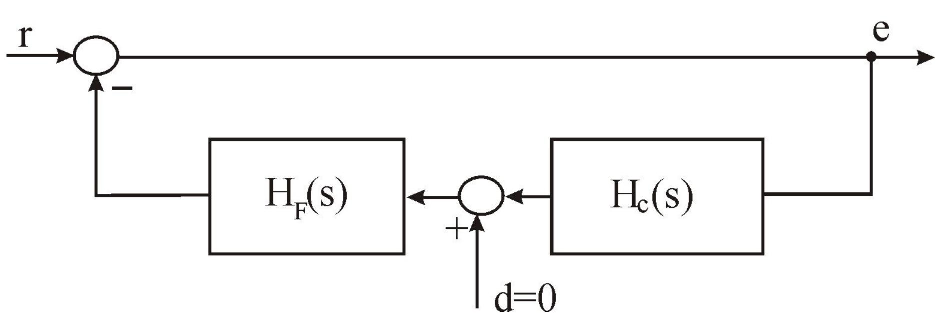
4.1. Alapjel követés

Feltételezve, hogy a bemeneti zaj értéke nulla (*d=0*), a rendszer átviteli függvényét az alapjelről a szabályozási hibára az alábbi módon számíthatjuk (lásd 4.3 Ábra):

$$e(s) = r(s) - y(s) \Rightarrow 1 = \frac{r(s)}{e(s)} - \frac{y(s)}{e(s)} \Rightarrow 1 = \frac{1}{H_E(s)} - H_C(s) \cdot H_F(s)$$

$$H_E(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + H_C(s) \cdot H_F(s)} = \frac{1}{1 + H_N(s)} \tag{4.2}$$

$H_N(s)$ a sorba csatolt szabályozóból és folyamatból álló nyílt rendszert modellje.



4.3 Ábra: Átvitel az alapjelről a szabályozási hibára

Ha az alapjel Laplace transzformáltja *r(s)*, az állandósult állapotbeli hiba az alábbi módon számítható:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot e(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot H_E(s) \cdot r(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+H_N(s)} \cdot r(s) \qquad (4.3)$$

4.1.1. Alapjel követés, ha a nyílt rendszerben nincs integrátor

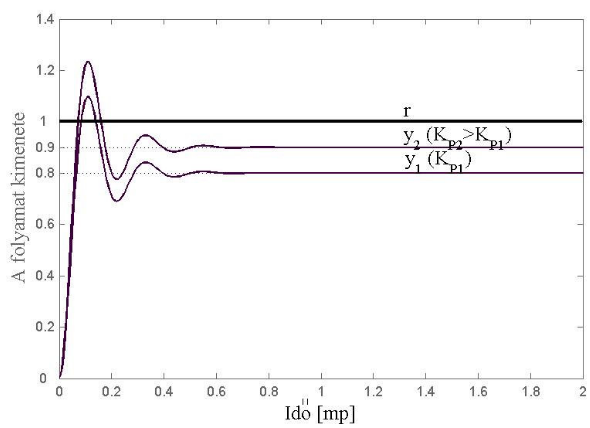
Tipikus példa - egyenáramú motor sebességszabályozása P vagy PD szabályozóval.
A nyílt rendszer modellje az alábbi formában írható fel:

$$H_N(s) = K_P K_F \frac{\left(\frac{1}{z_1}s+1\right)\cdots\left(\frac{1}{z_m}s+1\right)}{(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)} \qquad (4.4)$$

K_P a szabályozó erősítése, K_F a folyamat erősítése, z_i a nyílt rendszer zérusai, T_i a nyílt rendszer időállandói.
Feltételezve, hogy *az alapjel egységugrás*, *r(s)=1/s*, az állandósult állapotbeli hiba a (4.3) és (4.4) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+H_N(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_P K_F} = \frac{1}{1+K_P K_F} \qquad (4.5)$$

Ha a folyamat erősítése konstans, akkor *minél nagyobb a szabályozó erősítése, annál kisebb az állandósult állapotbeli hiba* (lásd 4.4 Ábra). Látszik, hogy zérus állandósult állapotbeli hibát csak végtelen nagy szabályozóerősítéssel lehet elérni.

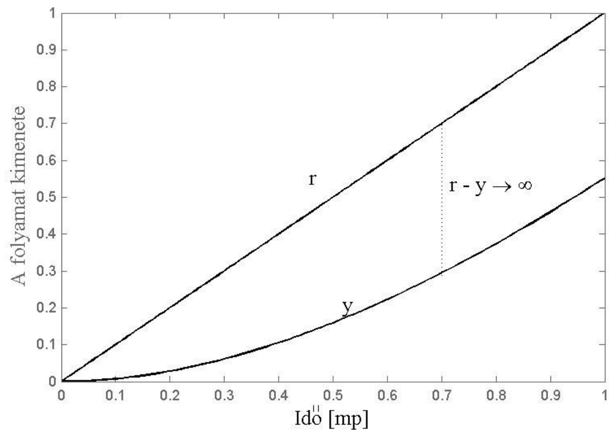


4.4 Ábra Állandósult állapotbeli hiba egységugrásra (integrátor nélkül)

Feltételezve, hogy *az alapjel sebességugrás*, *r(s)=1/s*^{2}, az állandósult állapotbeli hiba a (4.3) és (4.4) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+H_N(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_P K_F} \frac{1}{s} = \infty \tag{4.6}$$

Tehát sebességugrás alapjel esetében, ha a nyílt rendszer nem tartalmaz integrátort, az állandósult állapotbeli hiba végtelenhez tart, ezért sebességugrás alapjelre nem lehet szabályozni (lásd 4.5 Ábra).



4.5 Ábra Állandósult állapotbeli hiba sebességugrásra (integrátor nélkül)

4.1.2. Alapjel követés, ha a nyílt rendszer tartalmaz integrátort

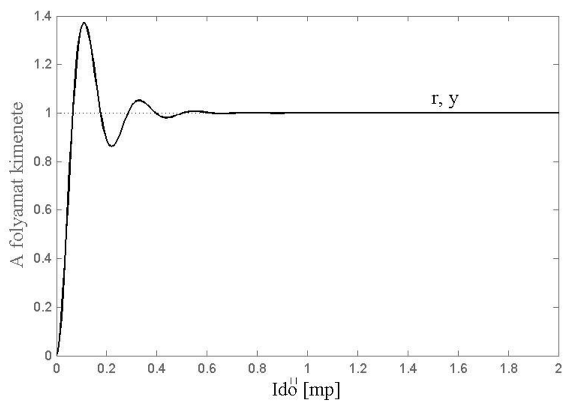
Tipikus példa: egyenáramú motor sebességszabályozása PI vagy PID szabályozóval vagy egyenáramú motor pozíciószabályozása P vagy PD szabályozóval.
Ebben az esetben a nyílt rendszer modellje az alábbi formában írható fel:

$$H_N(s) = K_P K_F \frac{1}{s} \frac{\left(\frac{1}{z_1}s+1\right)\ldots\left(\frac{1}{z_m}s+1\right)}{(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)} \tag{4.7}$$

Feltételezve, hogy *az alapjel egységugrás*, *r(s)=1/s*, az állandósult állapotbeli hiba a (4.3) és (4.7) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+H_N(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K}{s}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+K} = 0 \tag{4.8}$$

Ha van integrátor akár a folyamatban, akár a szabályozóban, egységugrás alapjelre az állandósult állapotbeli hiba nullához konvergál (lásd 4.6 Ábra).

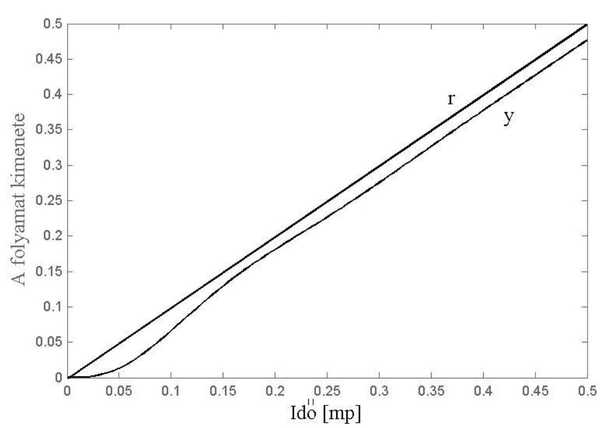


4.6 Ábra: Állandósult állapotbeli hiba egységugrásra (integrátorral)

Feltételezve, hogy *az alapjel sebességugrás*, $r(s)=1/s^2$, az állandósult állapotbeli hiba a (4.3) és (4.7) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{K_P K_F}{s}} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+K_P K_F} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{K_P K_F} \tag{4.9}$$

Ha az alapjel sebességugrás, az állandósult állapotbeli hiba nem válik zéróvá, de csökkenthető a szabályozó erősítésének növelésével (lásd 4.7 Ábra).



4.7 Ábra: Állandósult állapotbeli hiba sebességugrásra (integrátorral)

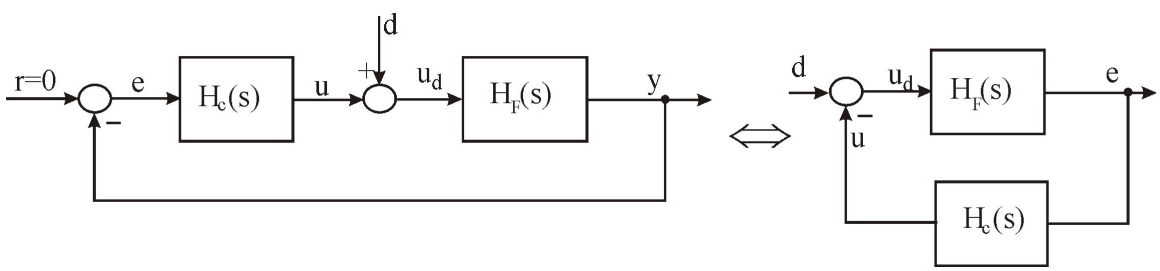
4.2. Zajelnyomás

Nulla alapjelet feltételezve vizsgálható a bemenetre ható zaj hatása az állandósult állapotbeli hibára. Tipikus példa a bemeneti zajra az egyenáramú motor sebesség vagy pozíciószabályozása a rotoron megjelenő külső terhelés jelenlétében.
A rendszer átviteli függvényét a bemeneti zajról a szabályozási hibára az alábbi módon számíthatjuk (lásd 4.8 Ábra):

$$u_d(s) = d(s) - u(s) \Leftrightarrow \frac{e(s)}{H_F(s)} = d(s) - H_C(s)\cdot e(s) \Leftrightarrow \frac{1}{H_F(s)}\cdot\frac{e(s)}{d(s)} = 1 - H_C(s)\cdot\frac{e(s)}{d(s)}$$

$$H_D(s) = \frac{e(s)}{d(s)} \Rightarrow \frac{H_D(s)}{H_F(s)} = 1 - H_C(s)\cdot H_D(s) \Leftrightarrow H_D(s)\left(\frac{1}{H_F(s)} + H_C(s)\right) = 1$$

$$H_D(s) = \frac{H_F(s)}{1 + H_F(s)\cdot H_C(s)} \tag{4.10}$$



4.8 Ábra: Átvitel a bemeneti zajról a szabályozási hibára

Ha a bemeneti zaj Laplace transzformáltja *r(s)*, az állandósult állapotbeli hiba az alábbi módon számítható:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot e(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot H_D(s)\cdot d(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{H_F(s)}{1+H_N(s)}\cdot d(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{H_F(s)}{1+H_F(s)H_C(s)}\cdot d(s) \tag{4.11}$$

A nyílt rendszer modelljét a (4.4) összefüggés definiálja. Legyen a folyamat modellje:

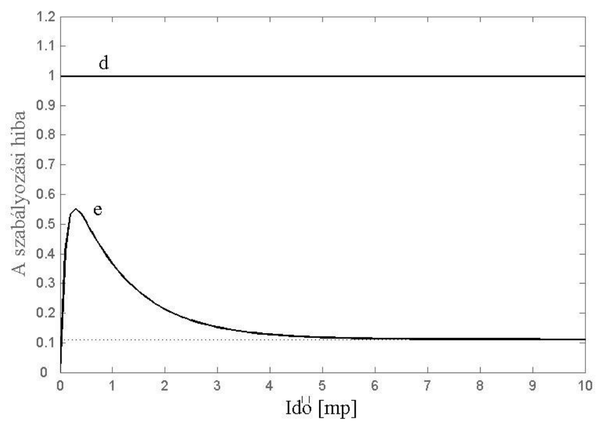
$$H_F(s) = K_F\,\frac{\left(\frac{1}{z_{F1}}s+1\right)\ldots\left(\frac{1}{z_{Fm}}s+1\right)}{(T_{F1}s+1)\cdots(T_{Fn}s+1)} \tag{4.12}$$

4.2.1. Zajelnyomás, ha a nyílt rendszerben nincs integrátor

Feltételezve, hogy *a bemeneti zaj egységugrás*, *d(s)=1/s*, az állandósult állapotbeli hiba a (4.11), (4.12) és (4.4) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H_D(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} s \frac{K_F}{1+K_P K_F} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_F}{1+K_P K_F} \tag{4.13}$$

Konstans bemeneti zaj integrátor hiányában nem zérus állandósult állapotbeli hibához vezet. Ha a szabályozó erősítését növeljük, a bemeneti zaj kisebb állandósult állapotbeli hibát okoz, a szabályozás zajelnyomását javítottuk (lásd 4.9 Ábra).



4.9 Ábra: Szabályozási hiba konstans bemeneti zaj esetén (a szabályozóban nincs integrátor)

4.2.2. Zajelnyomás, ha a folyamatban van integrátor

Feltételezve, hogy *a bemeneti zaj egységugrás*, *d(s)=1/s*, az állandósult állapotbeli hiba a (4.11), (4.12) és (4.4) összefüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H_D(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{K_F}{s}}{1+\frac{K_F K_P}{s}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{K_F}{s+K_F K_P} = \frac{1}{K_P} \tag{4.14}$$

Amennyiben a folyamatban van integrátor, de a szabályozóban nincs, ugyancsak nem garantálható a zérus állandósult állapotbeli hiba. A szabályozó erősítésének növelésével jobb zajelnyomás biztosítható (lásd 4.9 Ábra).

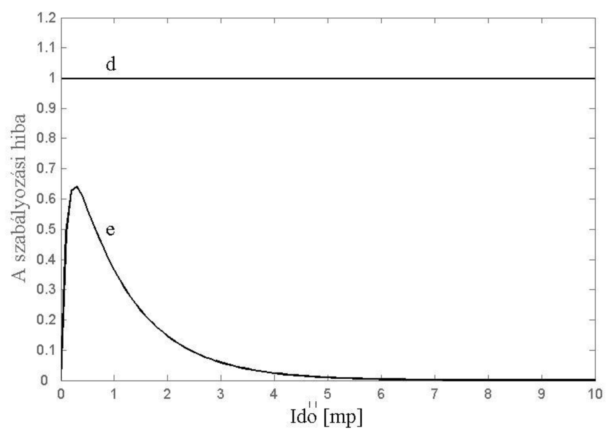
4.2.3. Zajelnyomás, ha a szabályozóban van integrátor

Feltételezve, hogy *a bemeneti zaj egységugrás*, *d(s)=1/s*, az állandósult állapotbeli hiba a (4.11), (4.12) és (4.4) összeüggések alapján:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H_D(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{K_F}{1+\frac{K_P K_F}{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{K_F \cdot s}{s + K_P K_F} = 0 \qquad (4.15)$$

Ha a szabályozó tartalmaz integráló csatornát, konstans bemeneti zajra garantálható a zérus állandósult állapotbeli hiba (lásd 4.10 Ábra).

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot H_D(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{K_F}{1+\frac{K_P K_F}{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{K_F \cdot s}{s + K_P K_F} = 0 \qquad (4.16)$$



4.10 Ábra: Szabályozási hiba konstans bemeneti zaj esetén (a szabályozóban nincs integrátor)

Az (4.16) összefüggés csak akkor igaz, ha a folyamat nem tartalmaz nulla zérust (ideális deriváló tagot), mert ez, a (4.11) összefüggés alapján, kompenzálná a szabályozóban levő integrátor hatását (a pólus-zérus kiejtés miatt).

4.1 Megjegyzés: Látszik, hogy a szabályozóban levő integrátor csatorna valamint az erősítés nagy hatással van az állandósult állapotbeli hibára. Ugyanakkor a szabályozóban levő deriváló tag csak egy plusz zérust visz a rendszerbe, ami az *s→0* feltétel mellett nem befolyásolja az állandósult állapotbeli hiba számolását (például a PD szabályozó esetén $\lim_{s\to 0} K_P(T_d s + 1) = K_P$).

4.2 Megjegyzés: Az állandósult állapot tárgyalása során azt feltételeztük, hogy vagy az alapjel, vagy a bemeneti zaj nulla. Ha egyik bemeneti jel sem nulla akkor, lineáris szabályozási rendszerek esetén, a hatásaik az állandósult állapotbeli hibára összeadódnak.