

Egyenáramú szervomotor modellezése

1. A gyakorlat célja:

Az egyenáramú szervomotor működését leíró modell meghatározása. A modell validálása számításokkal és szoftverfejlesztéssel katalógusadatok alapján.

2. Elméleti bevezető:

Az egyenáramú szervomotor napjainkban az egyik legelterjedtebb eszköz nagy pontosságú pozicionáló feladatok megoldására. A szervomotorok fő jellemzői a kis mechanikai és elektromos időállandók (gyors dinamika), kiterjedt lineáris működési tartomány, könnyű vezérelhetőség. Használatosak ipari robotkarok, mobilis robotok, X-Y pozicionáló asztalok, stb. meghajtására. Ahhoz, hogy ezekkel a motorokkal nagy pontosságú szabályozást tudjunk végezni elengedhetetlen, hogy a motor viselkedését leíró matematikai modellt ismerjük.

Kis teljesítményű szervomotoroknál a modell állórésze állandó mágnesből készülhet, míg a forgórész tekercselt. A forgórészre kapcsolt feszültség (U) hatására a rotor forgó mozgást végez

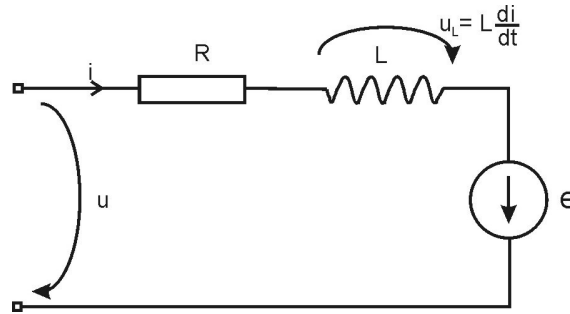
A modellezéshez a fizika és elektronika jól ismert alaptörvényeit használhatjuk. A Biot Savart törvény következményeként a motor által kifejtet forgatónyomaték (τ) arányos a rotoron átfolyó árammal (i). A Lenz törvény következményeként, a rotorban visszaindukált feszültség (e) pedig arányos a rotor fordulatszámával (ω).

$$\begin{cases} \text{Lenz: } e = c_1 \cdot \omega \\ \text{Biot Savart: } \tau = c_2 \cdot i_n \end{cases}$$

ahol c_1, c_2 konstansok.

Ismert, hogy a rotor egy sorba kötött L induktivitású ideális tekercsel és R ellenállással modellezhető. Figyelembe véve a külső rákapcsolt feszültséget (U) és a Lenz törvényt a motor elektromos egyenlete:

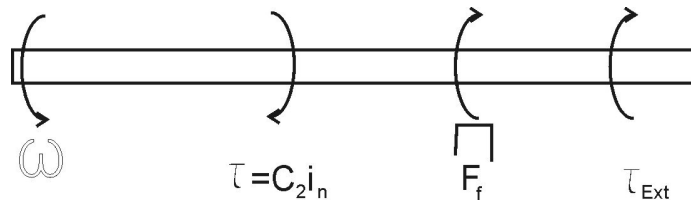
$$u = i \cdot R + L \frac{di}{dt} + e \quad (1)$$



1. Ábra: A rotor, mint elektromos áramkör

A mechanikai mozgásegyenlet felírásához ismernünk kell a rotorra ható forgatónyomatékokat (2. Ábra):

- a motor által kifejtet nyomaték, amit a Biot Savart törvény alapján határozhatunk meg
- a motorra ható külső nyomaték, amit a motor által mozgatott munkagép fejt ki (τ_{ext})
- a motor belsejében fellépő súrlódási erők (a rotor felfüggesztése és a szénkefék miatt). Ezt Coulomb súrlódási modellel írhatjuk le. ($F_f = -F_c \text{sign}(\omega)$, ahol F_c a Coulomb súrlódási tényező)



2 Ábra: A rotorra ható erők

A Newton mozgástörvény értelmében:

$$J_R \frac{d\omega}{dt} = c_2 \cdot i - F_f - \tau_{ext} \quad (2)$$

ahol J_R a rotor inerciája.

A motor dinamikus modelljéhez a mechanikai (2) és elektromos viselkedést (1) leíró egyenleteket használjuk:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + i \cdot R + c_1 \cdot \omega = u \\ J_R \frac{d\omega}{dt} = c_2 \cdot i - F_f - \tau_{ext} \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega \end{cases} \quad (3)$$

α jelöli a rotor szögpozícióját.

2.1. Az egyenáramú motor állapotteres modellje és átviteli függvénye:

Amint beláttuk, a motor viselkedését lineáris differenciálegyenletekkel írhatjuk le, ezért a motor sebesség- vagy pozíciószabályozásának tervezéséhez a lineáris rendszerek irányítástechnikáját alkalmazhatjuk. Ahhoz, hogy a lineáris szabályozótervezési algoritmusokat alkalmazni tudjuk, célszerű a motor modelljét állapotteres alakba átírni vagy meghatározni a motor átviteli függvényét.

Általában az *állapotteres modell* alakja: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, ahol x az állapotok vektora, u a

bemenetek vektor, A , B , C , D pedig a rendszermátrixok, amelyek tartalmazzák a motor paramétereit.

Az egyenáramú szervomotor esetében definiáljuk az alábbi állapot- valamint bemeneti vektort:

$$x = \begin{pmatrix} i \\ \omega \\ \alpha \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} F_f \\ \tau_{ext} \\ u \end{pmatrix} \quad (4)$$

Feltételezzük, hogy csak a motor szögelfordulása mérhető. Ebben az esetben a (3) egyenlet az alábbi alakba írható át:

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_1}{L} & 0 \\ \frac{c_2}{J_R} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} i \\ \omega \\ \alpha \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_R} & -\frac{1}{J_R} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} u \\ F_f \\ \tau_{ext} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$y = \alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} i \\ \omega \\ \alpha \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} u \\ F_f \\ \tau_{ext} \end{pmatrix}$$

Az (5) differenciál egyenletrendszer a motor állapotteres modelljét adja meg, amely alapján állapotteres tervezési algoritmusokat (pl. Ackerman módszer, LQ optimális irányítás). Vegyük észre, hogy a súrlódási erő meg a külső nyomaték zavaró bemenetként jelennek meg a modellbe. Ezek hatását terhelésbecslő algoritmusokkal kompenzálhatjuk.

Az *átviteli függvény* meghatározására a súrlódási erő meg a külső nyomaték hatását elhanyagoljuk ($F_f = \tau_{ext} = 0$). Az átvitelt az u vezérlőlőjlről a szögsebességre (ω) határozzuk meg. Induljunk ki a (2) mozgásegyenletből:

$$J_R \frac{d\omega}{dt} = c_2 \cdot i$$

Ezt differenciálva és alkalmazva az (1) egyenletet:

$$J_R \frac{d^2 \omega}{dt^2} = c_2 \cdot \frac{di}{dt} = c_2 \left(-\frac{R}{L} i - \frac{c_1}{L} \omega + u \right) = c_2 \left(-\frac{R}{L} \frac{J_R}{c_2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{c_1}{L} \omega + u \right)$$

$$J_R \frac{d^2 \omega}{dt^2} + J_R \frac{R}{L} \frac{d\omega}{dt} + \frac{c_1 c_2}{L} \omega = u$$

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\omega}{dt} + \frac{c_1 c_2}{L \cdot J_R} \omega = \frac{1}{J_R} u$$

A fenti differenciálegyenletre alkalmazva a Laplace transzformáltat könnyen megkaphatjuk a motor átviteli függvényét:

$$H(s) = \frac{\omega(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{J_R}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c_1 c_2}{L \cdot J_R}}$$

3. A mérés menete

3.1. A motor paramétereinek meghatározása

A MAXON cég nagy pontosságot és jó szabályozási jellemzőket megkövetelő alkalmazásokhoz gyárt kis teljesítményű szervomotorokat. Vegyük példának az A-max 32 24V/15W típusú motort.

Keressük ki a motor katalógusa alapján (lásd a mellékelt katalóguslapot) a motor paramétereit és alakítsuk át SI mértékegységekre:

- a rotor ellenállása (*terminal resistance*): $R_R = 7.13 \Omega$
- a rotor induktivitása (*terminal inductance*): $L_R = 1.05 \text{ mH} = 1.05 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
- A sebességállandó inverze (*speed constant*):

$$c_1 = \left(\frac{1}{\text{speed const}} \right) = \frac{1}{250} \left[\frac{\text{V}}{\text{rpm}} \right] = \frac{1}{26.16} \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right]$$

részletezve:

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ ford} / 60 \text{ sec};$$

$$1 \text{ ford} \dots\dots\dots 2\pi \text{ rad};$$

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ sec}} \dots\dots 1 \text{ rpm};$$

$$x \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \dots\dots\dots 250 \text{ rpm};$$

- A nyomatékállandó (*torque constant*): $c_2 = (\text{torque constant}) = 38.2 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right]$

- A rotor inerciája (*rotor inertia*):

$$J_R = 41.9 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 41.9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-11} \text{ kg m}^2 = 41.9 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

Az A , B állapotmátrixokban az alábbi paraméterek jelennek meg:

$$\frac{R_R}{L_R} = \frac{7.13}{1.05 \cdot 10^{-3}} = 6.79 \cdot 10^3$$

$$\frac{c_1}{L_R} = \frac{1/26.16}{1.05 \cdot 10^{-3}} = 36.4$$

$$\frac{c_2}{J_R} = \frac{38.2 \cdot 10^{-3}}{41.9 \cdot 10^{-7}} = 9.11 \cdot 10^3$$

$$\frac{1}{L_R} = \frac{1}{1.05 \cdot 10^{-3}} = 0.95 \cdot 10^3$$

$$\frac{1}{J_R} = \frac{1}{41.9} \cdot 10^7 = 23.8 \cdot 10^4$$

A motor belsejében fellépő *Coulomb súrlódási együttható* nem katalógusadat, azonban számolással meghatározhatjuk. Vegyük észre, hogy adott a rotor tekercsén külső terhelés nélkül folyó áram (*no load current*). Stacionárius állapotban a (2) egyenlet:

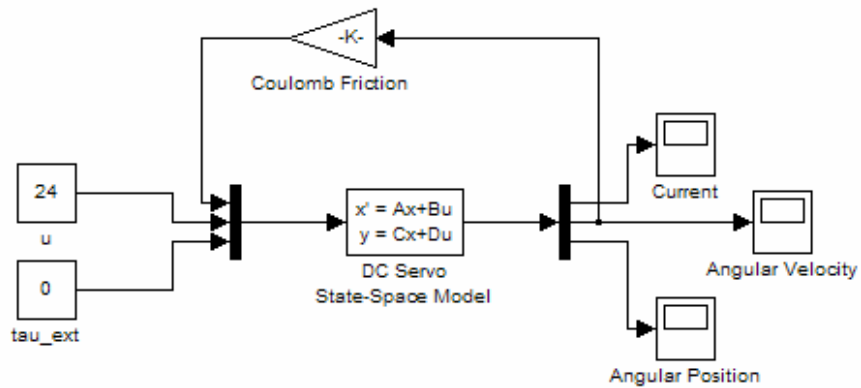
$$c_2 \cdot i_{NO_LOAD} = F_C + \underbrace{\tau_{ext}}_0 + J_R \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_0. \quad \text{Innen a Coulomb súrlódási együttható:}$$

$$F_f = c_2 \cdot i_{NO_LOAD} \Rightarrow F_f = 38.2 \cdot 10^{-3} \cdot 74 \cdot 10^{-3} = 1.795 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

3.2. A modellezés Simulink környezetben

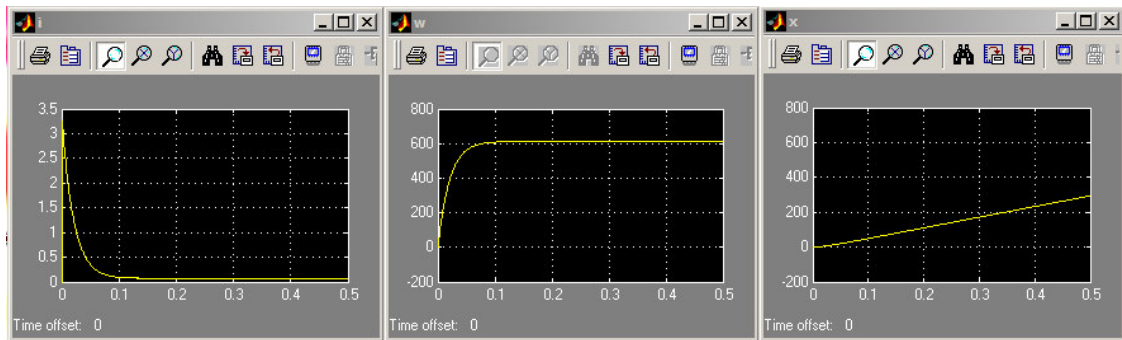
A kiszámított paraméterek alapján írjuk fel a motor állapotteres modelljét és építsük fel az alábbi Simulink modellt, amely tartalmazza: a motor állapotteres modelljét, bemeneteket (vezérlőjel, külső nyomaték), a Coulomb súrlódási erő modelljét. A három állapotot oszcilloszkópon figyeljük meg (válasszuk a C mátrixot egységmátrixnak). A szimulációs időnek válasszunk 0.5 mp -t.

A modell validálásához válasszuk a külső nyomatékot zérónak. Ebben az esetben a szögsebesség kimeneten a tranziens lejártá után meg kell kapjuk a motor terhelés nélküli sebességét (*no load speed*), ami katalógusadat $\omega_{NO_LOAD} = 5860 \cdot \frac{2\pi}{60} = 613.38 \text{ rad/sec}$.



3. Ábra. Simulink modell a motor dinamikus viselkedésének vizsgálatához

3.3. Szimulációs eredmények:



4. Ábra. A motoráram, rotor sebesség és pozíció

4. Kérdések és feladatok:

1. Tanulmányozzuk az (5) állapotteres modell irányíthatóságát és megfigyelhetőségét.
2. Határozzuk meg a motor átviteli függvényét a vezérlőjelről a szögpozíció kimenetre.
3. Tanulmányozzuk a nem zéró külső terhelőnyomaték hatását a rotor áramra és a rotor szögsebességére.