

# Lejtőn guruló golyó nemlineáris irányítása

## 1. A gyakorlat célja

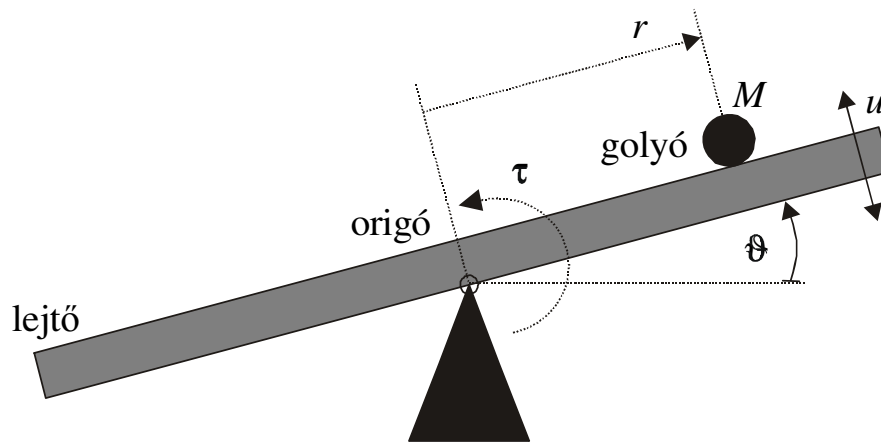
Lyapunov technikákon alapuló szabályozótervezési módszerek elsajátítása, alkalmazása a lejtő-golyó rendszerre. A nemlineáris szabályozási rendszer vizsgálata szimulációkkal. Az  $s$ -függvények technikájának megismerése.

## 2. Elméleti bevezető

### 2.1 A lejtőn guruló golyó dinamikus modellje

A lejtőn guruló golyó, mint irányított rendszer egy vezérelhető dőlésszögű lejtőből és egy rajta szabadon guruló golyóból áll. Mivel az egyedüli beavatkozó a rendszerbe a lejtő dőlésszögének szabályozását végző motor és a rendszer szabadságfoka 2 (a dőlésszög és a golyó pozíciója a lejtőn), a mechanikai rendszer alulirányított.

Az irányítási feladat: a golyót a lejtő egy adott pontjába szabályozni, vagy azt elérni, hogy a golyó egy előre megadott pályát kövessen a lejtőn (pl. egy szinuszos pályát). Bizonyították, hogy a lejtőn guruló golyó irányításának problémája ekvivalens a klasszikus longitudinális helikopter modelljének irányításával, ezért ennek a rendszernek a tanulmányozása és irányításának kérdése kiemelkedő jelentőségű. Az irányításhoz feltételezzük, hogy a lejtő dőlésszöge valamint szögsebessége, a golyó pozíciója és sebessége mérhető.



1. ábra. Lejtőn guruló golyó modellje

Jelölje  $\vartheta$  a lejtő szögelfordulását,  $J$  a lejtő (forgástengelyére vonatkozó) tehetetlenségi nyomatékát,  $M$  a golyó tömegét,  $R$  a golyó sugarát,  $J_b$  a golyónak (a középpontjára vonatkozó) tehetetlenségi nyomatékát és  $r$  a golyó távolságát a lejtő tengelyétől. Ha a golyó csúszásmentesen gördül, akkor a golyó  $\dot{r}$  sebessége és a gördülő

golyó  $\omega$  szögsebessége között fennáll:  $\dot{r} = R\omega \Rightarrow \omega = \dot{r}/R$ . Jelölje  $M$  a golyó tömegét, akkor a golyó potenciális energiája:

$$P = M g r \sin \vartheta \quad (1)$$

A kinetikus energia több komponensből áll. A forgó lejtő kinetikus energiája  $J \dot{\vartheta}^2 / 2$ . A nem gördülő, de a lejtővel együtt forgó golyó kinetikus energiája  $(J_b + M r^2) \dot{\vartheta}^2 / 2$ , ahol  $J_b$  a golyó középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. A gördülő golyó kinetikus energiája  $J_b (\dot{r}/R)^2 / 2$ , a tömegpont sebességének hatása  $M \dot{r}^2 / 2$ . A teljes kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} (J_b + M r^2) \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} J_b \left( \frac{\dot{r}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2. \quad (2)$$

A lejtőn guruló golyó dinamikus modelljének meghatározására az Lagrange-egyenleteket fogjuk használni.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Általánosított koordinátákként választható  $q = (q_1, q_2)^T := (r, \vartheta)^T$ . A Lagrange-egyenletben szereplő  $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial}{\partial q_i}$  deriválások eredményei a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} &= M \dot{r} + J_b \left( \frac{\dot{r}}{R} \right) \frac{1}{R} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} &= \left( M + \frac{J_b}{R^2} \right) \ddot{r} \\ \frac{\partial K}{\partial r} &= M r \dot{\vartheta}^2 \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= M g \sin \vartheta \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} &= (J + J_b + M r^2) \dot{\vartheta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} &= (J + J_b + M r^2) \ddot{\vartheta} + 2 M r \dot{r} \dot{\vartheta} \\ \frac{\partial K}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \vartheta} &= M g r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4)$$

Ezek felhasználásával a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} &= \left(M + \frac{J_b}{R^2}\right) \ddot{r} - Mr \dot{\vartheta}^2 + Mg \sin \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial K}{\partial \vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} &= (J + J_b + Mr^2) \ddot{\vartheta} + 2Mr \dot{r} \dot{\vartheta} + Mgr \cos \vartheta = \tau.\end{aligned}\quad (5)$$

Ha beavatkozó jelnek az

$$u := \ddot{\vartheta} = \frac{2Mr \dot{r} \dot{\vartheta} + Mgr \cos \vartheta}{J + J_b + Mr^2} \quad (6)$$

szöggyorsulást választjuk, akkor a rendszer nemlineáris dinamikus modellje az  $x = (r, \dot{r}, \vartheta, \dot{\vartheta})^T$  állapotválasztás és  $B = M / (M + J_b / R^2)$  jelölés mellett

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ B(x_1 x_4^2 - g \sin x_3) \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (7)$$

## 2.2. A módosított modell az irányításhoz és modell alapú irányítás

A lejtőn guruló golyót leíró modell nemlineáris, ezért természetes megközelítés az irányítás kidolgozására a visszacsatolásos linearizálás technikája lehetne. Azonban a modellben megjelenő  $x_1 x_4^2$  centrifugális tag miatt a rendszer relatív fokszáma nem jól definiált, a technika nem alkalmazható. A Jacobi linearizáláson alapuló approximálás csak egy jól definiált munkapont körül biztosíthat kielégítő szabályozást, pályakövetésre nem alkalmazható.

Ahhoz, hogy pályakövetést is megvalósítani képes irányítási algoritmust dolgozzunk ki, a (7) kifejezéssel leírt modellt írjuk fel az alábbi alakban:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= B \xi_B(\underline{x}) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= K_1 \xi_1(\underline{x}) + K_2 \tau + d\end{aligned}\quad (8)$$

ahol:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{M}{(Mx_1^2 + J + J_b)} & K_2 &= \frac{1}{(Mx_1^2 + J + J_b)} \\ \xi_B(\underline{x}) &= x_1 x_4^2 - g \sin x_3 & \xi_1(\underline{x}) &= 2x_1 x_2 x_4 + g x_1 \cos(x_3)\end{aligned}\quad (9)$$

$d$  külső nem mérhető zajt vagy additívmodellezési hibát jelöl. Feltételezzük, hogy a zaj korlátos:  $|d| < D_M$ .

Vegyük észre, hogy  $K_2$  alulról korlátos, vagyis  $K_2 > K_{2m}$ , ahol  $K_{2m} = 1/(J+J_b)$ . A  $K_1$  és  $K_2$  paraméterek időben változóak, függnek  $x_1$ -től, a golyó pozíciójától. De abban az esetben, amikor a golyó tömege nem túlzottan nagy, és a golyó nem távolodik el túlságosan a lejtő középpontjától, ezeket a paramétereket kezelhetjük kvázi-konstans paraméterként, és becslésükre használhatunk standard *on-line* becslési algoritmusokat. Máskülönb  $K_1$  és  $K_2$ , mint nemlineáris függvény, megközelíthető egyszerű egy kimenetű, egy bemenetű struktúrájú neurális hálózattal, mint például RBF hálózattal, amelyeknek bemenete  $x_1$ .

Az irányítási algoritmus kidolgozásához vezessük be az alábbi összetett sebesség és pozícióhibát:

$$S = \alpha S_1 + S_2 = \alpha((x_2 - \dot{x}_{1d}) + \lambda_1(x_1 - x_{1d})) + (x_4 + \lambda_2 x_3) \quad (10)$$

ahol  $\alpha, \lambda_1, \lambda_2 > 1$ ,  $x_d$  korlátos, kétszer differenciálható előírt pálya. Az első tag ( $S_1$ ) a golyó szabályozási hibája, a második tag ( $S_2$ ) a lejtő túlságosan nagy dőlésszögét bünteti annak érdekében, hogy elkerüljük a lejtő nagy amplitúdójú oszcillációját, ami akár instabilitáshoz is vezethet.

Természetesen az irányítás eredményeként nem várhatjuk el, hogy  $S \rightarrow 0$ , amikor  $t \rightarrow \infty$ , mivel a golyó mozgása feltételezi, hogy a második tag sohasem lesz 0. Definiáljuk az elérhető pontosságot  $\Phi$ -vel és vezessük be az alábbi függvényt  $S_\Delta = S \cdot \text{sat}(S/\Phi)$ , ahol  $\text{sat}()$  a jól ismert telítődési függvényt jelöli. Amennyiben az irányítási törvény garantálja, hogy  $S_\Delta \rightarrow 0$ , abban az esetben  $S$  konvergál a  $\Phi$  határérték belsejébe.

Könnyen belátható, hogy  $S_\Delta$  kielégíti az alábbi összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \dot{S}_\Delta &= \dot{S} \text{ ha } |S_\Delta| > \Phi; \dot{S}_\Delta = 0 \text{ máskülönb} \\ S_\Delta \text{sat}(S/\Phi) &= |S_\Delta| \text{ if } |S_\Delta| > \Phi \end{aligned} \quad (11)$$

Definiáljuk az alábbi Lyapunov függvényt:

$$V = \frac{1}{2} S_\Delta^2 \quad (12)$$

Amennyiben a zaj hatását elhanyagoljuk a modelltől a Lyapunov függvény deriváltját az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\dot{V} = S_\Delta \dot{S}_\Delta = S_\Delta (\alpha((B\xi_B(\underline{x}) - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1(x_2 - x_{2d})) + (K_1\xi_1(\underline{x}) + K_2\tau + \lambda_2 x_4)) \quad (13)$$

Válasszuk az irányítási törvényt:

$$u = \frac{1}{K_2} (-\alpha((B\xi_B(\underline{x}) - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1(x_2 - x_{2d})) - K_1\xi_1(\underline{x}) - \lambda_2 x_4 - K_S S_\Delta) \quad (14)$$

ahol  $K_S > 0$ .

Az irányítási törvény biztosítja, hogy  $\dot{V} = -K_S S_\Delta^2 < 0$ , ha  $S_\Delta \neq 0$ , tehát garantálja  $S$  konvergenciáját a  $\Phi$  határreteg belsejébe.

### 3. A mérés menete

*Feladat:* Legyen a mérlegkaron guruló golyó rendszer, amelyet a (7) és (6) összefüggésben megadott modellel írhatunk le. A modell paraméterei:

$$M = 0.05 \text{ kg};$$

$$R = 0.01 \text{ m};$$

$$J = 0.01 \text{ kgm}^2;$$

$$J_b = 1E-6 \text{ kgm}^2;$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

Valósítsuk meg a rendszer nemlineáris szabályozását úgy, hogy az alapjel egy 0.5 Hz frekvenciájú, 0.4 m amplitúdójú szinuszos jel legyen.

1. A (7) és (6) -ban megadott modellt és a (14) összefüggésben megadott szabályozót *s-function* formájában építjük fel. Az *s* függvény általános formája:

```
function [sys, x0]= model(t, x, u, flag)

if (sys==0)
    %Initialization
    sys = [ ,           % number of continuous states
           ,           % number of discrete states
           ,           % number of outputs
           ,           % number of inputs
           0,         % reserved must be zero
           ];         % direct feedthrough flag
    x0 = [];

if (flag==1)                                     % continous states
    sys=
elseif (flag==2)                                % output equation
    sys=
elseif (flag==3)                                % model constants
    sys=
else
    sys=[];
end
```

Egy *s* függvény bemenetei az idő (*t*) a rendszer állapotai (*x*), a rendszer bemenetei (*u*) és egy kapcsoló (*flag*) amely az *s* függvény állapotát adja meg. A visszaterítési érték (*sys*) a kapcsoló értékétől függ.

Ha a kapcsoló értéke 0 akkor a rendszer dimenzióit és kezdő állapotait (*x0*) adjuk meg. Az *sys* utolsó paramétere 0, ha a bemenet hatása egyenes úton jelentkezik a kimeneten (statikus elemek is vannak a rendszerben)

Ha a kapcsoló értéke 1, akkor a rendszer folytonos állapotainak változását kell visszatéríteni ( $dx/dt$ )

Ha a kapcsoló értéke 2, akkor a rendszer diszkrét állapotainak változását kell visszatéríteni ( $x_{k+1}$ )

Ha a kapcsoló értéke 3, akkor a rendszer kimeneteit kell visszatéríteni ( $y$ )

Alkalmazás a mérlegkar-golyó feladatra:

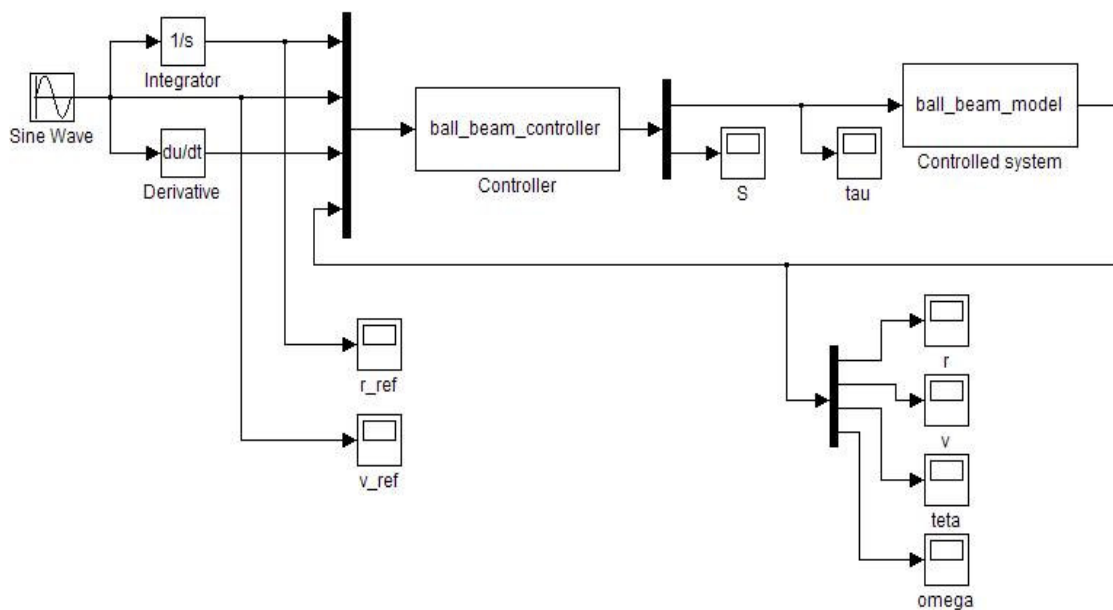
A modell esetén a rendszernek 4 állapota van, a kimenetei pedig az állapotok, a rendszernek egy bemenete van. Kezdeti állapotnak a kezdőpozíciója a rendszernek legyen 1, az összes többi kezdőállapot pedig nulla.

A rendszernek a folytonos állapotainak változását a (6), (7) összefüggés adja, mintavételes állapotai pedig nincsenek.

A szabályozási algoritmus esetén a rendszernek 7 bemenete (az előírt pozíció, sebesség és gyorsulás valamint a rendszer 4 visszamért állapota) és két kimenete van (a beavatkozó jel és az összetett hibametrika). A szabályozónak nincs folytonos, sem diszkrét dinamikus állapota, a bemenetek és a kimenet között statikus leképezés van. A beavatkozó jel számítását a (10) és (14) összefüggés adja.

A szabályozó paramétereit válasszuk:  $\lambda_1 = 10$ ;  $\lambda_2 = 100$ ;  $\alpha = 10$ ;  $K_S = 100$ ;

2. Készítsük el a rendszer Simulink modelljét a 2. Ábra alapján.



2. Ábra: A szabályozási rendszer Simulink modellje

3. Az eredmények kiértékelése: A 2. Ábra alapján figyeljük a rendszer előírt viselkedését és valós viselkedését.

- Figyeljük meg az összefüggést a lejtő dőlésszöge és a beavatkozó jel között.
- Hogyan befolyásolja a  $K_s$  erősítés értéke a szabályozás tranzienseit
- Hogyan befolyásolják a  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  paraméterek a szabályozás tranzienseit
- Vizsgáljuk a szabályozás robusztosságát: Módosítsuk a golyó tömegét a rendszermodellben. Hogyan változik meg a szabályozás minősége nehezebbilletve könnyebb golyóval

#### ***4. Kérdések és feladatok***

1. Módosítsuk úgy a Simulink modellt, hogy a szabályozót és a folyamatot egy s-függvényben valósítsuk meg.
2. Hogyan valósítaná meg C programozási nyelven a nemlineáris irányítási algoritmust?
3. Alkalmazható-e a bemutatott irányítási algoritmus az inverz inga nemlineáris megoldására?