A robusztos PID szabályozó tervezése

1. A gyakorlat célja

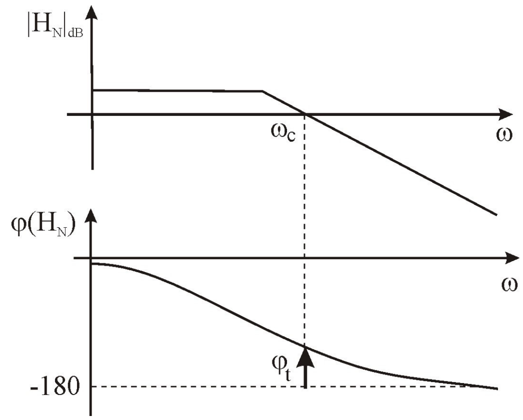
Robusztos PID szabályozó tervezése harmadfokú folyamatra. A szabályozás vizsgálata szimulációkkal.

2. Elméleti bevezető

Közismert, hogy a szabályozási rendszerek stabilitását a zárt rendszer pólusai határozzák meg (például folytonos esetben, ha az összes pólus valós része negatív a szabályozási rendszer stabil). A pólusok helye a komplex síkban azonban nem ad információt a stabilitás *mértékéről*. Ez akkor jelenthet problémát, ha az idő során az irányított folyamat paraméterei megváltoznak, vagy a modell nem írja le pontosan a valós irányított folyamatot és így implicit módon a pólusok helye is megváltozik a komplex térben, vagy a valós folyamat pólusai nem ugyanott vannak, mint a szabályozótervezéshez alkalmazott modell pólusai. Így, habár a tervezés során a szabályozási rendszerünk a jó minőségi jellemzők mellett stabilitást is mutatott, amennyiben a valós folyamat paraméterei módosulnak, a zárt rendszer akár a stabilitását is elveszítheti.
Tehát számos irányítási feladatnál szükséges, hogy a szabályozó akkor is garantálja a zárt rendszer stabilitását, ha a folyamat paraméterei megváltoznak. Az ilyen megfontolás alapján tervezett szabályozókat *robusztus*nak nevezzük. A robusztus szabályozók tervezéséhez szükségünk van egy jellemzőre, amellyel a stabilitás mértéke írható le. Ennek alapján úgy tervezzük meg a szabályozót, hogy a stabilitást jellemző érték minél nagyobb legyen. Ilyen jellemző lehet a *fázistartalék*.
A zárt rendszer stabilitása a nyílt rendszer Bode diagramja alapján is vizsgálható. Először az amplitúdómenetről le kell olvasni a *vágási körfrekvenciát* (ω_c), vagyis hogy melyik körfrekvencia értéken metszi az amplitúdómenet a vízszintes tengelyt. A vágási körfrekvencia pontjában leolvassuk a fázismenet értékét. Ha a fázismenet a vágási körfrekvencia értékén nagyobb, mint -180^o akkor a rendszer stabil, ellenkező esetben instabil. A fázistartalék az a szögkülönbség, amit a vágási körfrekvenciához tartozó fázismenet értéke és -180^o között mérünk (lásd 1 Ábra):

$$\varphi_t = \varphi(H_N(j\omega_C)) - (-180°) = \varphi(H_N(j\omega_C)) + 180° \qquad (1)$$

$\varphi(H_N(j\omega_C))$ a nyílt rendszer ω_c vágási körfrekvenciához tartozó fázismenetét jelöli. *A stabilitás feltétele, hogy a fázistartalék pozitív legyen*.



1 Ábra: Fázistartalék a Bode diagramon

A nyílt rendszer fázistartaléka változtatható a szabályozó paramétereivel. Robusztus szabályozótervezésnél az a cél, hogy úgy válasszuk meg a szabályozó paramétereit, hogy a nyílt rendszernek minél nagyobb fázistartalékot biztosítsunk.
PID tervezése: A cél a PID típusú szabályozó paramétereinek meghatározása úgy, hogy a szabályozó rendszer akkor se veszítse el a stabilitását, ha a tervezésnél alkalmazott modell nem írja le tökéletesen a valós irányított folyamat viselkedését, vagy ha a folyamat paraméterei megváltoznak.
Ha a szabályozó garantálja, hogy a nominális nyílt rendszernek nagy előírt fázistartaléka legyen, akkor a bizonytalansági sávban található valós rendszer is jó eséllyel stabil marad. Tehát *a robusztus stabilitást garantáló szabályozók paramétereit úgy kell meghatározni, hogy a nyílt rendszer nagy fázistartalékkal rendelkezzen.*
A robusztusság mellett a tervezésnél más követelményeket is előírhatunk, mint például gyors válasz és korlátozott beavatkozó jel.
A PID szabályozó átviteli függvénye általánosan:

$$H_C(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{sT_d}{1 + s \cdot T}\right) \tag{2}$$

A K_P, T_i, T_d, T paramétereket kell meghatározni úgy, hogy a szabályozás robusztus legyen. Bizonyos feladatokhoz elégséges, ha csak egyszerűbb struktúrájú P, PI vagy PD szabályozót alkalmazunk. Ilyenkor kevesebb paramétert kell meghatározni.

A követelményeket az alábbi három pontban foglalhatjuk össze:
I. Legyen a nyílt rendszer fázistartaléka egyenlő egy előírt φ_{tREF} fázistartalékkal.
II. Legyen a beavatkozó jel maximális értéke u_{MAX}.
III. Legyen az irányított rendszer válasza minél gyorsabb.

Az I. feltétel teljesítéséhez először meg kell határozni a nyílt rendszer vágási frekvenciáját (ω_C), vagyis ahol az amplitúdómenet metszi a vízszintes tengelyt. Mivel a Bode diagram logaritmikus, ezért az amplitúdómenet a vágási frekvencián 1. Ezek után a nyílt rendszer (1) összefüggés alapján számított fázistartaléka egyenlő kell legyen az előírt fázistartalékkal. Tehát az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \left|H_C(j\omega_C)\right| \cdot \left|H_F(j\omega_C)\right| = 1 \\ \pi + \varphi(H_C(j\omega_C)) + \varphi(H_F(j\omega_C)) = \varphi_{tREF} \end{cases} \tag{3}$$

A II. feltételt akkor kell figyelembe venni, ha a szabályozó deriváló csatornával is rendelkezik. A szabályozás indításakor a szabályozó bementén egységugrásszerű hiba jelenik meg. Ezért a *t=0* időpillanatban a deriváló csatorna miatt a beavatkozó jel megugrik. A szabályozó paramétereket úgy kell megválasztani, hogy a szabályozó egységugrásra adott válasza a *t=0* időpillanatban egyenlő legyen az előírt maximális beavatkozó jellel.
A PD (és PID) szabályozó egységugrásra adott válaszának meghatározásához alkalmazzuk a Laplace transzformált alábbi tulajdonságát:

$$\lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{s\to\infty} su(s) \tag{4}$$

Mivel az egységugrás Laplace transzformáltja *1/s*:

$$\lim_{s\to\infty} su(s) = \lim_{s\to\infty} sH_C(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} H_C(s) = \lim_{s\to\infty} K_P \cdot \left(1 + \frac{sT_d}{1 + s\cdot T}\right) = K_P \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy PID esetén is ugyanez lesz az eredmény. Az (5) összefüggésben kapott érték egyenlő kell legyen u_{MAX}-al.
A III. feltételt pólus-zérus kiejtéssel érhetjük el. A szabályozó zérusait úgy választjuk meg, hogy ejtsék ki az irányított folyamat lassú pólusait.
A csak egy erősítésparaméterrel rendelkező P szabályozóval csak az I. feltétel teljesíthető. Zérussal is rendelkező szabályozókkal garantálható a pólus-zérus kiejtés, tehát a gyors válasz.
A tervezés lépései során feltételezzük, hogy az irányított folyamat harmadfokú rendszer, de a tervezési módszer egyszerűen módosítható más rendszerosztályokra is. Feltételezzük, hogy az irányított folyamat dinamikája az alábbi modellel írható le:

$$H_F(s) = \frac{K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \tag{6}$$

Legyen T_3 a leglassúbb, T_1 a leggyorsabb időállandó a folyamatban, vagyis: $T_3 > T_2 > T_1$. A rendszer összes paraméterét ismertnek tekintjük.
A nyílt rendszer szűrt PD szabályozóval és az irányított folyamattal :

$$H_C(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{sT_d}{Ts+1}\right) \frac{K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \left(\frac{(T_d + T)s + 1}{Ts + 1}\right) \frac{K_P K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \tag{7}$$

Válasszuk úgy a $T_d + T$ értékét, hogy ejtse ki a leglassabb T_3 pólust:

$$T_d = T_3 - T \tag{8}$$

A pólus-zérus kiejtés után a nyílt rendszer:

$$H_N(s) = \frac{K_P \cdot K_F \cdot \left((T_d + T)s + 1 \right)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(Ts + 1)} \overset{T+T_d=T_3}{=} \frac{K_P K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(Ts + 1)} \tag{9}$$

A (3) egyenletrendszert alkalmazva kapjuk. Mivel a szabályozó tartalmaz deriváló csatornát, vegyük figyelembe a beavatkozó jel korlátosságára kikötött feltételt:

$$\begin{cases} \dfrac{K_P K_F}{\sqrt{\left(T_1^2 \omega_C^2 + 1\right)\left(T_2^2 \omega_C^2 + 1\right)\left(T^2 \omega_C^2 + 1\right)}} = 1 \\ \pi - arctg(T_1 \omega_C) - arctg(T_2 \omega_C) - arctg(T) = \varphi_{tREF} \\ K_P \cdot \left(1 + \dfrac{T_3 - T}{T}\right) = u_{MAX} \end{cases} \tag{10}$$

A fenti nemlineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek K_P, T, ω_C. A T_d deriválási időt a T paraméter ismeretében a (8) összefüggés alapján kapjuk.
A pólus-zérus kiejtés elvégzéséhez a PID szabályozót módosított alakban kell felírni:

$$H_C(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{sT_d}{1 + s \cdot T} + \frac{1}{T_i s}\right) = K_P \cdot \frac{1 + s \cdot T + T_i T_d s^2 + T_i s(1 + s \cdot T)}{T_i s(1 + s \cdot T)} = K_P \cdot \frac{T_i (T_d + T)s^2 + (T + T_i)s + 1}{T_i s(1 + s \cdot T)} \tag{11}$$

A modell számlálóját keressük az alábbi alakban:

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) = T_i (T_d + T)s^2 + (T + T_i)s + 1 \tag{12}$$

Könnyen belátható, hogy a τ_1, τ_2 és a szabványos szabályozóparaméterek között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\begin{cases} \tau_1 \cdot \tau_2 = T_i (T_d + T) \\ \tau_1 + \tau_2 = T + T_i \end{cases} \tag{13}$$

A pólus zérus kiejtéshez válasszuk: $\tau_1 = T_2$, $\tau_2 = T_3$. Ezzel a paraméterválasztással szabályozó deriválási és integrálási idejét az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$\begin{cases} T_d = \dfrac{T_2 T_3}{T - T_2 - T_3} - T \\ T_i = T - T_2 - T_3 \end{cases} \tag{14}$$

A nyílt rendszer szűrt PID szabályozóval és az irányított folyamattal a pólus-zérus kiejtés végrehajtása után:

$$H_N(s) = \frac{(K_P/T_i)\cdot K_F \cdot (\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)(Ts+1)} \overset{\substack{\tau_1=T_3\\ \tau_2=T_2}}{=} \frac{K_P K_F/(T_2+T_3-T)}{s(T_1 s+1)(Ts+1)} \qquad (15)$$

Ugyanakkor vegyük figyelembe a beavatkozó jel korlátosságára kikötött feltételt is, kapjuk az alábbi összefüggést:

$$\begin{cases} \dfrac{K_F\, K_P/(T_2+T_3-T)}{\omega_c\sqrt{(T_1^2\omega_C^2+1)(T^2\omega_C^2+1)}}=1 \\ \pi-\dfrac{\pi}{2}-arctg(T_1\omega_C)-arctg(T\omega_C)=\varphi_{tREF} \\ K_P\cdot\dfrac{T_2\cdot T_3}{(T_2+T_3-T)}=u_{MAX} \end{cases} \qquad (16)$$

A fenti nemlineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek K_P, T, ω_C. A T_d, T_i paramétereket a már meghatározott T paraméter ismeretében a (14) összefüggés alapján számíthatjuk.

2.1. Előírt fázistartalékon alapuló tervezés kiterjesztése mintavételes rendszerekre

Az előző fejezetben bemutatott, folytonos rendszerekre kidolgozott szabályozótervezési módszer az előírt fázistartalék biztosítására kis változtatásokkal kiterjeszthető mintavételes szabályozók tervezésére is. A tervezés a bilineáris (Tustin) transzformáción alapszik, amellyel mintavételes (z komplex változóban felírt) átviteli függvények folytonos (s komplex változóban felírt) átviteli függvényekké transzformálhatóak és fordítva. A bilineáris transzformáció esetében az áttéréshez az alábbi összefüggést kell alkalmazni (Tustin képlet):

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1} \qquad (17)$$

T a mintavételi periódust jelöli. A transzformáció fordítottja:

$$z=\frac{1+s\dfrac{T}{2}}{1-s\dfrac{T}{2}} \qquad (18)$$

A bilineáris transzformáció fontos tulajdonsága, hogy a komplex tér bal félsíkját az egységsugarú kör belsejébe transzformálja. A fordított transzformáció pedig a komplex egységsugarú kör belsejét a komplex tér bal félsíkjába transzformálja. Tehát ha a folytonos rendszer stabil, a transzformációval kapott mintavételezett rendszermodell is garantáltan stabil lesz és fordítva. Ezért a robusztusságot garantáló szabályozók mintavételes átírásánál a bilineáris transzformációt érdemes alkalmazni.

A szabályozó tervezéséhez adott az előírt fázistartalék (φ_{tREF}, u_{MAX}) valamint a beavatkozó jel maximális értéke, valamint a mintavételezett rendszer modellje $H_F(z)$.
A mintavételes szabályozó tervezésének lépései:
I. A bilineáris transzformációt alkalmazva megkapjuk a rendszer folytonos modelljét. Eredmény: $H_F(s)$.
II. A folytonos modellre megtervezzük a folytonos idejű szabályozót. Eredmény: $H_c(s)$.
III. A folytonos szabályozót bilineáris transzformációval mintavételes alakra hozzuk. Eredmény: $H_c(z)$.
A II. lépésben a folytonos szabályozótervezésnél leírtakat kell követni. Egyedüli eltérés a maximális beavatkozó jel számításánál van. Feltételeztük, hogy a beavatkozó jel a $t=0$ időpontban (mintavételes esetben a $k=0$ mintavételben) lesz a legnagyobb. A beavatkozó jel értékét mintavételes rendszereknél másképp kell számítani. A beavatkozó jel értéke a legelső mintavételben, ha a szabályozó bemenete egységugrás:

$$u_0 = \lim_{z\to\infty} u(z) = \lim_{z\to\infty} H_C(z)\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \lim_{z\to\infty} H_C(z) = H_C(z\to\infty) \tag{19}$$

Bilineáris transzformáció esetén, ha a z komplex változó értéke a ∞–be tart, az s komplex változó:

$$\lim_{z\to\infty} s = \lim_{z\to\infty}\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \tag{20}$$

Tehát ha áttérünk folytonos rendszermodellre, és a beavatkozó jel értékét keressük a legelső mintavételben, s helyébe $2/T$ –t kell helyettesíteni:

$$u_0 = H_C(s) \overset{s=\frac{2}{T}}{=} H_C\left(\frac{2}{T}\right) \tag{21}$$

A szabályozó tervezésénél a pólus-zérus kiejtés mellett, a korlátozott beavatkozó jel és előírt fázistartalék biztosításához, az inverz bilineáris transzformációval kapott folytonos modellt alkalmazva az alábbi nemlineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} \left|H_C(j\omega_C)\right|\cdot\left|H_F(j\omega_C)\right| = 1 \\ \pi + arctg\varphi(H_C(j\omega_C)) + arctg\varphi(H_F(j\omega_C)) = \varphi_{tREF} \\ H_C(T/2) = u_{MAX} \end{cases} \tag{22}$$

Matlab függvényeket használva a tervezési séma az alábbi módon foglalható össze:

$$H_F(z) \xrightarrow{\substack{\text{"Tustin"} \\ d2cm}} H_F(s) \rightarrow \textit{, P-Z kiejtés, 'fsolve'} \rightarrow H_C(s) \xrightarrow{\substack{\text{"Tustin"} \\ c2dm}} H_C(z)$$

3. A *mérés menete*

Feladat: Legyen az alábbi harmadfokú rendszer

$$H_F(s) = \frac{5}{(s+1)(4s+1)(10s+1)}$$

A rendszer egyesítése $K_F=5$, időállandói $T_1=1$ másodperc (mp), $T_2=4$ mp, $T_3=10$ mp. Tervezzünk a rendszernek PID szabályozót úgy, hogy a nyílt rendszer fázistartaléka $\varphi_{tREF}=50^o$ legyen, a beavatkozó jel egységnyi hibabemenet esetén legyen $u_{MAX}=10$.

A feladat megoldása:

1. Pólus-zérus kiejtés: Mivel a rendszer két lassúbb időállandója a $T_3=10$ és a $T_2=4$, ezért a pólus-zérus kiejtés során ezeket kell kiejteni. A pólus-zérus kiejtés után a nyílt rendszert a (15) összefüggés írja le.
2. Az előírt fázistartalék és a maximális beavatkozó jel biztosítása: (15) nemlineáris összefüggés megoldására a Matlab *fsolve* függvényét alkalmazzuk. Ehhez az egyenletrendszert $\underline{f}(\underline{x})=\underline{0}$ alakba kell hozni, ahol $\underline{x}$ az ismeretlen változók vektorát jelöli. A mi esetünkben az ismeretlen paraméterek vektora: $\underline{x}=(w_C\ T\ K_p)^T$. Először egy Matlab függvényt kell készítsünk az alábbi formában.

Először egy Matlab függvényt építünk fel, a következő formában:

```
function f=pidfun(x);
  %f1=f(x1,x2,x3)
  %f2=f(x1,x2,x3)
  %f3=f(x1,x2,x3)

% a fuggveny bemenete
wc=x(1);  % kritikus korfrekvencia
Kp=x(2);  % a szabalyozo erositese
T=x(3);   % a D tag kesleletese

% Az iranyitott rendszer parameterei
…..
f1= …..       % kritikus frekvencia egyenlet
f2= …..       % fazistartalek egyenlet
f3= …..       % maximalis vezerlojel egyenlet
f=[f1 f2 f3]';
```

A függvény megoldásához az *fsolve* hívást az alábbi formában végezhetjük:

```
x = fsolve('pidfun',[wc0 Kp0 T0]);
wc = x(1)
Kp = x(2)
T  = x(3)
```

Mivel a nemlineáris egyenlet megoldásához a Matlab iteratív eljárást alkalmaz, kiinduló értéket kell adjunk a megoldásnak (`[wc0 Kp0 T0]`). Válasszuk mindhárom kiinduló értéket 1-nek.

3. Számítsuk ki az integrálási és deriválási időt a (14) összefüggések alapján
4. Az eredmények kiértékelése:
- Írjuk fel a nyílt rendszert és olvassuk le a fázistartalékát a *margin* függvénnyel.
- Írjuk fel a zárt rendszert és vizsgáljuk az egységugrásra adott válaszát a *step* függvénnyel.
- Vizsgáljuk a kapott PID szabályozó egységugrásra adott válaszát a *step* függvénnyel.
- Robusztussági teszt: Módosítsuk (növeljük értékét duplájára) az irányított folyamat erősítését és az előző pontokban tervezett szabályozóval vizsgáljuk a nyílt rendszer fázistartalékát és a zárt rendszer és a zárt rendszer egységugrásra adott válaszát.

4. Kérdések és feladatok

1. Módosítsuk a maximális beavatkozó jel értékét 20-ra és tervezzük újra a szabályozót. Hogyan változtatja ez meg a szabályozás tranzienseit?
2. Készítsük el a szabályozási kör modelljét Simulink környezetben.
3. A 2.1 alfejezetben leírtak alapján terjesszük a tervezést mintavételes rendszerekre.