Aktív lengéscsillapítás. Szabályozás állapottérben

1. A gyakorlat célja

Állapotteres tervezés megvalósítása valós idejű másodfokú rendszerekre. Az állapotteres szabályozó valós idejű megvalósítása, a szabályozókör vizsgálata.

2. Elméleti bevezető

A klasszikus irányítási algoritmusok zöme a folyamatok ki-bemeneti modellje (átviteli függvények) alapján határozzák meg az irányítási feladatot megoldó szabályozót. Ezek a szabályozók (a kaszkád szabályozó kivételével) csak a folyamat kimenetét veszik figyelembe a beavatkozó jel meghatározásánál. Az állapotteres modellekkel komplexebb viselkedésű rendszerek is leírhatóak. Ezen modelleken alapuló szabályozók a folyamat belső állapotai is felhasználják a beavatkozó jel meghatározásánál. Így komplexebb irányítási feladatok, mint például nem polinomiális alapjel követése nulla állandósult állapotbeli hibával vagy nemlinearitást is tartalmazó rendszer irányítása, is megoldhatóak.
Az állapotteres modell *n* darab egymással csatolt elsőfokú differenciálegyenlettel írja le a folyamat viselkedését. Mindegyik differenciálegyenlet az egyik állapot változását adja meg az összes állapot és bemenetek függvényében:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned} \tag{1}$$

n az állapotok ($\underline{x}$), *m* a bemenetek ($\underline{u}$), *p* a kimenetek ($\underline{y}$) száma. Az *A, B, C, D* mátrixok a folyamat paramétereit tartalmazzák, definiálva a folyamat dinamikus viselkedését. Az *A* mátrixot állapotmátrixnak is nevezzük.
Mintavételes állapotteres modell a rendszer $k+1$ -ik mintavételbeli állapotát határozza meg a *k*-ik mintavételbeli állapot és a *k*-ik mintavételbeli bemenet függvényében. A kimeneti egyenletben a *k*-ik mintavételbeli kimenetet a *k*-ik mintavételbeli állapot és *k*-ik mintavételbeli bemenet alapján írható fel. Lineáris rendszerek esetén az állapotteres modell:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \Phi\,\underline{x}_k + \Gamma\underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C\,\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{cases} \tag{2}$$

A *Φ, Γ, C, D* mátrixok a folytonos rendszer paramétereitől valamint a mintavételi periódustól függenek.

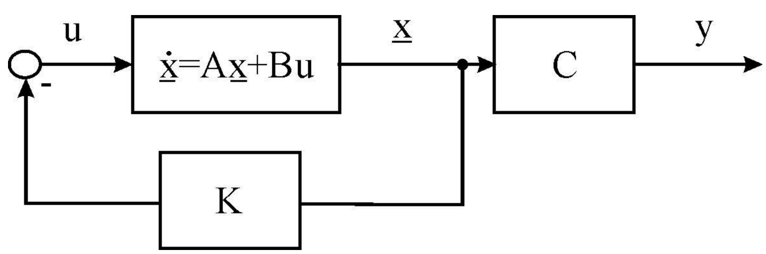
1.1 Pólusáthelyezés

Pólusáthelyezéssel a szabályozott rendszernek előírt tranziens viselkedést lehet biztosítani. Állapotteres modelleknél az A mátrix sajátértékei definiálják a rendszer tranziens viselkedését. A szabályozási feladat tranziens viselkedésének előírásaként a szabályozott rendszer sajátértékeit írjuk elő. Ehhez első lépésként a kívánt tranziens viselkedést biztosító karakterisztikus polinomot szükséges meghatározni, amelynek gyökei lesznek az előírt sajátértékek.
A pólusáthelyezés feladata: a beavatkozó jelet (a rendszer u bemenete) határozzuk meg úgy az állapotok függvényében, hogy a visszacsatolt zárt rendszer sajátértékei az előírtak legyenek.
Egy bemenetű egy kimenetű rendszerek esetén a beavatkozó jelet az alábbi módon számíthatjuk:

$$
\begin{aligned}
&u = -K\underline{x} \\
&K = \begin{pmatrix} k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & k_0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \\
&u = k_{n-1}x_1 + k_{n-2}x_2 + \dots + k_0 x_n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A K sorvektor konstans értékeket (erősítéseket) tartalmaz. A beavatkozó jel az állapotok lineáris kombinációja.
Az irányított rendszer az állapotvisszacsatolással:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu; \; u = -K\underline{x} \\
&\dot{\underline{x}} = (A - BK)\underline{x}
\end{aligned}
\tag{4}
$$



1 Ábra: Állapotvisszacsatolás kialakítása

Írjuk fel harmad fokú rendszer esetén a zárt rendszer A állapotmátrixát.
Legyen a rendszer állapotváltozását leíró modell: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu$
A beavatkozó jel számítása $n=3$ –ra:

$$
\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k_0 \end{pmatrix} \quad u = -\begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -k_2 x_1 - k_1 x_2 - k_0 x_3 \tag{5}
$$

A zárt rendszer állapotmátrixa:

$$A - BK = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_1 & k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 k_2 & a_{12} - b_1 k_1 & a_{13} - b_1 k_0 \\ a_{21} - b_2 k_2 & a_{22} - b_2 k_1 & a_{23} - b_2 k_0 \\ a_{31} - b_3 k_2 & a_{32} - b_3 k_1 & a_{33} - b_3 k_0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Látszik, hogy a zárt rendszer pólusai megváltoznak és függnek az állapotvisszacsatolás erősítésvektorától. A K vektor elemeinek helyes megválasztásával biztosíthatjuk, hogy a zárt rendszer sajátértékei az előírtak legyenek. Már a harmad fokú rendszer esetén is látszik, hogy általános esetben a feladatot megoldani nehéz.

Az optimális állapotvisszacsatolás esetén az alábbi költségfüggvényt kell minimizálni

$$\begin{cases} J = \int\limits_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt \\ \min\limits_u J \end{cases}, \quad Q, R > 0 \tag{7}$$

A megoldást állapotvisszacsatolás formájában kapjuk

$$u = -K \cdot x = -\left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots k_n x_n \right) \tag{8}$$

Az állapotvisszacsatolás erősítésvektorát (8) összefüggés adja, ahol P értét a Riccati egyenletből kapjuk.

$$\begin{aligned} & K = R^{-1} B^T P \\ & P \cdot A + A^T P + P \cdot B \cdot R^{-1} B^T R + Q = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

1.2 Állapotteres szabályozók bővítése integráló taggal

Közismert, hogy a szabályozóban elhelyezett integrátor tag javítja a szabályozó kör alapjel követési tulajdonságát, ugyanakkor a bemeneti zajokat is képes kompenzálni. Amennyiben az alapjel konstans, az integrátor garantálja a nulla állandósult állapotbeli hibát, konstans bemeneti zaj hatását pedig képes teljesen kompenzálni.

Bővítsük ki úgy a szabályozónkat, hogy a visszacsatolásban jelenjen meg a kimenet integrálja (x_I).

$$x_I = \int y dt \Rightarrow \dot{x}_I = y = C \cdot \underline{x} \tag{10}$$

A szabályozó kibővítéséhez a kimenet integrálját helyezzük el úgy az állapotteres modellben, mint egy új állapotot:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{x}_I \end{pmatrix}}_{\dot{\tilde{\underline{x}}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_I \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u \tag{11}$$

Tervezzük meg az állapotvisszacsatolást a $\dot{\underline{\tilde{x}}} = \tilde{A} \cdot \underline{\tilde{x}} + \tilde{B} \cdot u$ bővített rendszerre. Az így kapott állapotvisszacsatolással a beavatkozó jel tartalmazza a kimenet intergálját is:

$$u = -\tilde{K} \cdot \underline{\tilde{x}} = -\begin{pmatrix} K & K_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_I \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K & K_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \int y dt \end{pmatrix} \tag{12}$$

A kibővített állapotvisszacsatolás tartalmazza az integrátoros szabályozások előnyeit (jó alapjelkövetés, zajelnyomás). Amennyiben a szabályozóban állapotbecslést is szükséges alkalmazni, azt nem a bővített, hanem az eredeti rendszerre kell megtervezni.
Mintavételes rendszereknél ugyanígy járunk el: az állapotok vektorát bővítjük a kimenet integráljának mintavételes megközelítésével, majd a kibővített állapotvektort csatoljuk vissza. Az integrátor mintavételes megközelítéséhez alkalmazhatunk téglalapszabályt:

$$x_I = \int y dt \qquad x_{I\,i+1} = x_{I\,i} + T \cdot y_i = x_{I\,i} + T \cdot C \cdot \underline{x}_i \tag{13}$$

T a mintavételi periódust jelöli.
A kibővített mintavételes rendszer, amelyre az állapotvisszacsatolást tervezzük:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \underline{x}_{i+1} \\ x_{I\,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ T \cdot C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_i \\ x_{I\,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y_i = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_i \\ x_{I\,i} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{14}$$

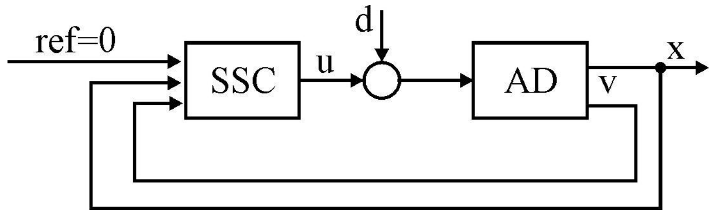
A kibővített rendszer állapotvisszacsatolásának tervezéséhez az Ackermann formulát alkalmazhatjuk.

3. A *mérés menete*

Feladat: Tervezzünk állapotteres szabályozót a rendszernek, amely lengés nélküli tranzienseket biztosít és képes konstans bemeneti zajok hatását kompenzálni. Feltételezzük, hogy a bemeneti zaj négyszögjel.
A megoldáshoz optimális szabályozót alkalmazunk kibővítve integráló taggal.

3.1. A szabályozó tervezése

A szabályozási kör tömbrajza a 2. Ábrán látható. SSC (State Space Controller) az állapotteres szabályozót, AD (Active Damping) pedig az irányított folyamatot jelöli.



2. Ábra: A szabályozás tömbrajza

A tervezés lépései:
1. Először a rendszer átviteli függvény alakjában megadott dinamikus modelljét alakítsuk át állapotteres modellé Matlab környezetben:

$$H_F(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + k_f s + k_R} \xrightarrow{tf2ss} \begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{matrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

2. Válasszuk az állapot visszacsatolást az alábbi alakban: $u = k_1 x + k_2 v + k_I \int \underbrace{c \cdot x}_{x_I}$, x_I új, integrátornak megfelelő állapot.
3. Az optimális szabályozó tervezéséhez alkalmazzuk a Matlab *lqr* függvényét szabályozó. Az integrátor miatt a szabályozót a (11) összefüggésben adott kibővített rendszerre tervezzük. A súlyzómátrixokat válasszuk: *Q=diag([10⁵ 1 1]), R=1.*

```
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

Az állapot visszacsatolás erősítésvektorát a *K* adja.

3.2 A szabályozó implementálása

A szabályozót az alábbi alakban implementáljuk:

$$u = -k_1 x - k_2 v - k_I x_I \tag{15}$$

A szabályozó megvalósításához először az integrátor komponenst kell mintavételes formában felírni: Ehhez a téglalapmódszert alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy a T mintavételi periódus 15 milliszekundum és hogy a modellben a C kimeneti mátrix $C = [2600 \quad 0]$, kapjuk:

$$x_I = \int C \cdot x = \int 2600 \cdot x dt$$

$$x_I = \sum_{k=1}^{n} T \cdot 2600 \cdot x_k$$

$$x_{I\,k} = x_{I\,k-1} + \underbrace{T}_{0.015} \cdot x_{I\,k} \tag{16}$$

Az irányítási algoritmust az *ActiveDamping* terv *Active_Damping_State_Space_Control* függvényében valósítjuk meg. A megvalósítás lépései:

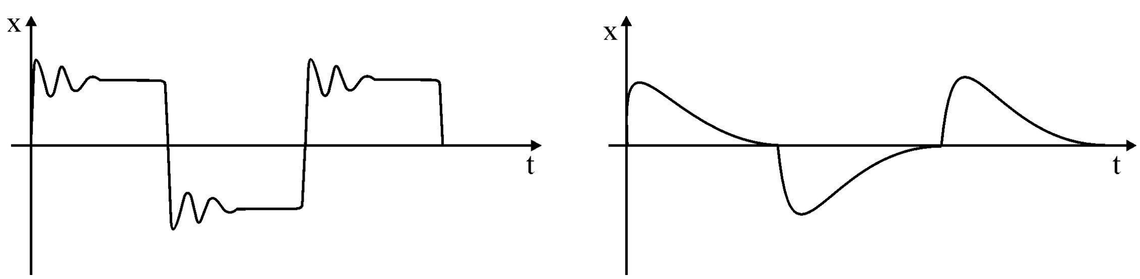
1. Generáljunk négyszögjelet a rendszer *d* kimeneten. A négyszögjel két állapota + *1* Volt és *-1* Volt, periódusa legye 500 minatvétel. *-1* Volthoz a *FIRSTPORTCH*-n *0*-t, a *FIRSTPORTB*-n *4*-et kell kiküldeni. +*1* Volthoz a *FIRSTPORTCH*-n *0*-t, a *FIRSTPORTB*-n *0X0B*-t kell kiküldeni. A kiküldéshez alkalmazzuk a *cbDOut* függvényt.
2. Olvassuk be a pozíciót és sebességet A pozíció 0 bemeneti csatornán, a sebesség az 1 bementeti csatornán van. A beolvasáshoz használjuk a *cbAIn* függvényt.
3. Kalibráljuk a sebességet és pozíciót feszültséggé felhasználva, hogy a 0 beolvasott érték -5 Voltnak, 4096 beolvasott érték +5 Voltnak felel meg.
4. A számítsuk ki a beavatkozó jelet a (15) és (16) összefüggések alapján.
5. A beavatkozó jel kiküldése: A beavatkozó jel értékét korlátozzuk +/- 2047 közé (mivel a beavatkozó jelet 10 biten lehet kiküldeni). Ezután eltoljuk az értéket a 0 … 4096 tartományba (mivel 0 kimenetnek -5 Volt, 4096-nak pedig + 5 Volt felel meg) A kiküldésnél a felső négy bitet a FIRSPORTCL-on, az alsó 8 bitet a FIRSTPORTA-n küldjük ki.

if >2047 → $u_k = 2047$

if <-2047 → $u_k = -2047$

```
ControlOut = (int)ControlSignal + 2048;
ControlOutLow = ControlOut & 0x0FF
ControlOutHigh = ControlOut >> 8;
cbDOut (1, firstPortA, ControlOutLow);
cbDOut (1, firstPortCL, ControlOutHigh);
```

Helyes tervezés-megvalósítás esetén a nem szabályozott illetve szabályozott pozíció kimenet az alábbi tranzienst kell mutassa az oszcilloszkópon:



3. Ábra: Nem szabályozott/szabályozott kimenet

4. Kérdések és feladatok

1. Milyen más módszert alkalmazhatunk állapotteres becslésnél a konstans bemeneti zaj kompenzálására?
2. Tesztelje az optimális szabályozást más Q, R mátrixokra.
3. Módosítsa a programot úgy, hogy a bementi zaj nem négyszögjel, hanem fűrészfog jel. Vizsgálja a rendszer válaszát. Milyen pontosan tudja elnyomni a fűrészfog jel bemeneti zajt a szabályozó?