Vályi Gyula Emlékkonferencia

Vályi Gyula Emlékkonferencia

Kolozsvár, 2004. november 11–12.

Erdélyi Múzeum-Egyesület
Kolozsvár
2005

Erdélyi Múzeum-Egyesület
Matematikai és Informatikai Szakosztály
Farkas Gyula Egyesület a Matematikáért és Informatikáért

Szerkesztő
Kása Zoltán

© Erdélyi Múzeum-Egyesület, Farkas Gyula Egyesület a Matematikáért és Informatikáért, 2005

Tartalomjegyzék

Kolumbán József: *Előszó* 7
Weszely Tibor: *Vályi Gyula emlékezete* 9
Weszely Tibor: *Vályi Gyula projektív geometriai kutatásai* 15
Bege Antal: *Vályi Gyula differenciálegyenletekkel kapcsolatos munkáiról* 18
Oláh-Gál Róbert: *Adalékok a Vályi-kutatáshoz* 22
Sándor József: *Vályi Gyula számelméleti munkásságáról* 34
Kiss Elemér–Sándor József: *Változatok egy Bolyai-témára* 41
Bege Antal–Fülöp Péter-István: *Schinzel egy prímszámokra vonatkozó sejtésének a vizsgálata* 46
Horváth Sándor: *Mátrixok Frobenius-alakjának egy jellemzése* 51
Kása Zoltán: *Véges és végtelen szavak bonyolultsága* 60
Kiss Sándor: *A kúpszeletek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben* 71
Makó Zoltán–Szenkovits Ferenc–Garda-Mátyás Edit: *Az excentrikus anomália meghatározása mesterséges neuronháló segítségével* . . 83
Simon Károly: *Dinamikus klaszterezés genetikai algoritmusokkal* . . . 95
Szász Róbert–Albert László Róbert: *Egy csillagszerűségi feltételről* . 103
Szilágyi Miklós: *Parciális függvények Ω-algebrájáról* 109
Sebestyén Júlia: *Szemelvények a Vályi Gyula Matematikai Társaság tevékenységéből* 116
Proceedings of the Gyula Vályi Memorial Conference – Abstracts of the papers 131

Előszó

Az EME Matematikai és Informatikai Szakosztálya 2004. novemberében, a Magyar Tudomány Napja Erdélyben rendezvénysorozat keretében, Vályi Gyula születésének 150. évfordulója alkalmából emlékkonferenciát szervezett. Ebben a kötetben az ott bemutatott 23 dolgozat közül most néhányat az érdeklődő olvasó rendelkezésére bocsátunk. Ezek közül az első hat Vályi Gyula életéről és munkásságáról szól. Szerzőik az erdélyi matematika szakavatott ismerői és kutatói, akik igazi lokálpatriótaként tárják fel szülőföldjük – részben feledésbe merült – szellemi kincseit.

Weszely Tibor 1983-ban megjelent *Vályi Gyula élete és munkássága* című könyvében elsőként hívta fel az erdélyi magyar értelmiség figyelmét a kolozsvári egyetem kiváló tanárára. Akárcsak a Bolyaiakról korábban megjelent három könyvnek, ennek is nagy sikere volt. A szerző hozzáértéssel és sok empátiával mutatta be Marosvásárhely nagy szülöttjének pályafutását és szellemi teljesítményeit. Ugyanez mondható kötetünkben közölt két cikkéről is.

Oláh-Gál Róbert már Bolyai Jánossal kapcsolatban is bizonyította, hogy a nagy elődök életének feltárásában elkötelezett matematikus. Szenvedéllyel kutatja a megmaradt dokumentumokat, tárgyi emlékeket, és alapos munkája eredményeként, időről-időre felmutat egy-egy gyöngyszemet.

Sándor József a számelmélet világszerte elismert kutatója. A Kluwer és Springer kiadóknal megjelent könyveivel elévülhetetlen érdemeket szerzett magának és az erdélyi matematikának. Vályi Gyula számelméleti munkásságáról ebben a kötetben közölt cikkéből is sugárzik a tehetség és szakavatottság.

Kiss Elemér az 1999-ben megjelent *Matematikai kincsek Bolyai János hagyatékából* című könyvével a tudományos világban óriási feltünést keltett. A marosvásárhelyi Teleki-Bolyai könyvtárban folytatott több éves kitartó munkájának eredmenyeit összefoglalva, elsőként mutatott rá arra, hogy Bolyai János nemcsak a geometriában alkotott nagyot, hanem sok számelméleti eredményével is megelőzte korát. A Sándor Józseffel írt *Változatok egy Bolyai-témára* című dolgozat is egy ilyen eredmény kapcsán született.

Bege Antal és Fülöp Péter István kötetünkben a természetes számokkal kapcsolatban két tételt bizonyít és két, eddig megoldatlan feladatot fogalmaz meg.

Horváth Sándor azt vizsgálja, milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy egy négyzetes mátrix adott Frobenius- (vagy Jordan-) alakban felírható legyen? Explicit eredményeket másod- és harmadrendű mátrixok esetére ad, de a felhasznált módszer (elvben) nagyobb mátrixok esetén is alkalmazható.

Kása Zoltán mint a témának egyik legaktívabb kutatója, a szókombinatorika fontos kérdésköréről, a szavak bonyolultságának vizsgálatairól ad jól dokumentált áttekintést.

Kiss Sándor a matematikai didaktika ismert művelője. Dolgozatában a kúpszeletek egyenleteinek alakját tárgyalja bizonyos ferdeszögű koordinátarendszerek esetén, és rámutat ezek alkalmazhatóságára az analitikus mértan tanításánál.

Makó Zoltán, Szenkovits Ferenc és Garda-Mátyás Edit egy módszert mutat be a perturbált Kepler-egyenlet közelítő megoldására neuronhálók felhasználásával.

Simon Károly egy új dinamikus klaszterezési algoritmust ismertet.

Szász Róbert és Albert László Róbert az analitikus függvények geometriai elméletében elért, figyelemre méltó eredményüket mutatják be P.T. Mocanu akadémikus egyik megoldatlan feladatával kapcsolatban.

Szilágyi Miklós adott halmaz részhalmazain értelmezett függvények algebrai és topológiai struktúraját vizsgálja, ha a függvények értékei egy topologikus szigma-algebra elemei.

Sebestyén Júlia az 1994-ben Marosvásárhelyen létrehozott Vályi Gyula Matematikai Társaság eddigi tevékenységét ismerteti, hangsúlyosan érintve a romániai magyar nyelvű matematikai oktatás problémáit az általános iskolákban.

Köszönettel tartozunk az EME vezetőségének a konferencia lebonyolítását és ennek a kötetnek a megjelentetését elősegítő anyagi támogatásért.

Kolumbán József,
a *Farkas Gyula Egyesület a Matematikáért és Informatikáért* és
az *EME Matematikai és Informatikai Szakosztályának* elnöke

Vályi Gyula emlékezete

Weszely Tibor
Sapientia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar, Marosvásárhely
Email: weszely@rdslink.ro

Már közel egynegyed évezredes múltjára tekintett vissza a marosvásárhelyi Református Kollégium, amikor 1804. májusában Bolyai Farkas, az iskola auditóriumában megtartotta székfoglaló beszédét. Egy fejlődési korszak veszi kezdetét, mely nemcsak a Kollégium, hanem a magyar tudománytörténet szempontjából is igen jelentős. Ugyanis, a XIX. század folyamán ebben az iskolában olyan matematikai zsenik nevelkednek, mint Bolyai János és Vályi Gyula. Mindkettő esetében Bolyai Farkas komoly hatása érezhető.

Vályi Gyula 1855. január 25-én született Marosvásárhelyen. A művelt családi környezet, amelyben felnőtt, jelentős hatással volt jellemének kialakulására és a tudományok iránti vonzalmára. A széles látókörű szülők mindent megtettek, hogy a felnőtt életkort megért három gyermekük: Gábor (1844-1926), Róza (1851-1900) és Gyula (1855–1913), a lehető legjobb nevelésben részesüljenek. Vályi Gyula szülei, úgy apai, mint anyai ágon, régi erdélyi magyar családok leszármazottjai. Az egyik, akkoriban még Válli György néven szereplő ősükről, a XVI. században történik hivatalos említés, amikor Báthory Zsigmond fejedelem nemeslevelet állíttat ki számára. Maga Vályi Károly, miután befejezte a marosvásárhelyi Református Kollégiumban folytatott tanulmányait, ideiglenesen, a város postamesteri állását tölti be. De rövid időn belül a jogi végzettséget megszerezve, már 1848 előtt, a város törvényszéki bírái között találjuk. Több éven át a marosvásárhelyi Református Egyházközség kurátora.

Sokkal erőteljesebb volt a családi hagyomány anyai ági ápolása. Gyula édesanyja, Dósa Ráchel, a marosvásárhelyi Református Kollégium első jogi professzorának, Dósa Gergelynek volt a lánya. Ugyanakkor, a jogi professzor másik gyermeke, Dósa Elek, vagyis Vályi Gyula nagybátya, az akkori Erdély legnagyobb jogtudósa volt. Réthy Mór, aki szoros kapcsolatot ápolt a Vályi családdal, az egyik írásában említi, hogy a család tudatában elevenen élt az a hagyomány, miszerint egyik ősük a nagyhírű parasztlázadás vezére, az 1514-ben kivégzett Dózsa György volt. S valóban, átnézve Sándor Imrének a Dózsa (vagy ahogyan más leszármazottak használták Dósa) családra vonatkozó *Makfalvi és uzapaniti Dózsa család* című átfogó tanulmányát, mely a Kolozsváron nyomtatott családtörténeti folyóiratban a Genealógiai Füzetek 1903. évi 3-as számában jelent meg, megerősíti a családban ápolt hagyomány realitását.

Vályi Gyulát kisgyermek korában egész életére kiható baleset éri. Még négyéves sincs, amikor egy esés következtében lábtörést szenved, és a hibás orvosi kezelés miatt, élete végéig sétabot használatára kényszerül.

Hat és féléves korában, 1861 őszén, szülei beíratják a marosvásárhelyi Református Kollégiumba, melynek 12 éven át, megszakítás nélkül diákja. A sovány és vézna gyerek rendkívüli tehetsége és szorgalma hamar kitűnik. „Az elemi és gimnáziumi osztályokban – írja Réthy Mór – egyaránt minden tárgyból kitűnő előmenetelt tanúsított, és tanárai, közöttük Mentovich Ferenc, a matematika és fizika lelkes és tudós professzora is róla a legnagyobb csodálattal beszéltek."

Gimnáziumi évei alatt jelentkeznek az állandóan súlyosbodó szembetegségének első tünetei. Eleinte az hátráltatja, hogy naponta csak néhány órát tanulhat, de később oly súlyossá válik, hogy hetekre be kell szüntetnie minden írást és olvasást igénylő tevékenységet. 1873-ban befejezi kollégiumi tanulmányait és a családi beszélgetések alkalmával gyakran esik szó a továbbtanulási lehetőségekről. Az erre vonatkozó döntés kimenetelére vonatkozóan némi magyarázattal szolgálnak Réthy Mór visszaemlékezéseinek az alábbi sorai: „1877. évi nagy szünidő idején Borszékre utazva, Marosvásárhelyt Vályit szülői házában felkeresvén, atyja és anyja engemet hálájukkal elhalmoztak [...]. Soha el nem felejtem azt a puritán, egyenes lelkű, kedves párt, és még ma is előttem áll az öreg Vályi, amint lelkes szavakkal beszél volt tanáráról, Bolyai Farkasról, és mutatva a Tentamen-példányt a mester dedikációjával. Abból a lelkesen elmondott néhány szóból vált előttem világossá, hogy Vályi Gyula miért választotta éppen a matematikai tudományok művelését élete céljává."

Ugyanis, 1873 őszén, Vályi Gyula beiratkozik a csupán azelőtti évben alapított kolozsvári Tudományegyetem matematika- és természettudományi karára. Választásában kétségtelenül még közrejátszott a viszonylagos földrajzi közelség és az a tény, hogy testvérbátyját, Vályi Gábort, már az egyetem alapítási évében meghívták a jog- és államtudományi kar statisztika professzorának. Az egyetemen leginkább Martin Lajos és Réthy Mór előadásai hatottak rá, de tanárai között ott találjuk Brassai Sámuelt is, aki az 1872–1883 közötti időszakban az elemi mennyiségtant tanítja. A kitűnően tanuló diák 1877-ben leteszi a „középiskolai tanári vizsgát" és ezzel matematika-fizika szakos tanári oklevelet szerez. Ezt követően Martin Lajos és Réthy Mór mindent elkövetnek, hogy az egyetem rendelkezésére álló néhány külföldi tanulmányi ösztöndíj közül az egyiket Vályi Gyula kapja meg. Törekvésüket siker koronázta. Azt, hogy Vályi számára mit jelentett a berlini egyetemre szóló ösztöndíj elnyerése, szükséges megemlítenünk néhány dolgot. Az akkori idők egyik legjelentősebb tudományos centruma Berlin volt. Matematikatörténeti szempontból az ottani egyetem világhírét az ott tanító „csillaghármas" (Dreigestirn) alapozta meg: Karl Weierstrass (1815–1897), Ernst Kummer (1810–1893), Leopold Kronecker (1823–1891). Az előadásaikon a hallgatóság tekintélyes hányadát, a rendes egyetemi hallgatók mellett, a más egyetemeken és iskolákban tanító tanárok tették ki. Elképzelhető tehát, hogy mit jelentett Vályi Gyula továbbképzése szempontjából a berlini egyetemre szóló két éves ösztöndíj elnyerése, amit ki is használt. Kínzó szembaja ellenére Weierstrass előadásait oly

csodálatosan dolgozta fel, hogy amikor a nagy német matematikus halála után a berlini Akadémia elhatározta előadásainak kiadatását, a Vályi által készített jegyzeteket is felhasználták. Vályi későbbi feljegyzéseiből kitűnik, hogy berlini tartózkodása alatt két tudományos dolgozatot írt, melyek közül az egyiket jeles fizikatanárának Kirchhoffnak, a másikat pedig Weierstrassnak nyújtotta be. Mivel ezek nem jelentek meg nyomtatásban, tartalmi értékük homályba veszett. A kétéves ösztöndíj lejártával, 1880 tavaszán Vályi visszatér Erdélybe.

Tudományos tevékenységének gyökerei azonban az 1876-os kolozsvári diákévekig nyúlnak vissza, amikor a budapesti Műegyetemi Lapok című folyóirat hasábjain, a König Gyula által kitűzött két feladat olyan szintű megoldását közli, hogy az akkoriban már nemzetközileg is ismert matematikus, levélben keresi fel Vályit. Ez nagy hatással volt rá, mely gesztus kétségtelenül a fiatal diák rendkívüli tehetségének a felismeréséről tanúskodik. Úgy tűnik, hogy Vályi még a kolozsvári diákéveinek vége felé, már érdeklődni kezd az akkori professzora, Martin Lajos kutatásai iránt, aki a legjobb hajócsavar és szélkerék elméletével kapcsolatban több tanulmányt jelentetett meg. Berlinből visszatérve most már aktívan kapcsolódik be ő is az ilyen irányú kutatásokba. Ennek a műszaki kérdésnek a megoldása egy komoly matematikai probléma megoldása elé állítja őt, amely a parciális differenciálegyenletek elméletének a továbbfejlesztését teszi szükségessé. Ezen irányú kutatásait néhány hónap alatt befejezi, és ez képezi anyagát az 1880-ban elkészült doktori disszertációjának, melynek címe: *A másodrendű partialis differentialis egyenletek elméletéhez.* Jelentősége miatt ezt még kétszer újra kiadták: 1906-ban, majd 1910-ben német fordításban mivel, az eredetileg magyar nyelven írt munkát, csak szűkebb körben tudták tanulmányozni. Ugyanis a külföldi érdeklődés tette szükségessé fordításban való megjelentetését. Itt főleg W. Kapteyn holland matematikusra gondolunk, aki a Vályi által megkezdett gondolatok továbbfejlesztésével is foglalkozott.

A doktori címet is megszerző Vályi Gyulát 1881 májusában a kolozsvári Tudományegyetem matematika és természettudományi karának vezetősége magántanárrá nyilvánítja, és így, még azon év őszétől megkezdheti működését az egyetemen. Nem egészen két év alatt hét újabb igen jelentős tudományos dolgozata jelenik meg. Hároméví magántanári tevékenysége után az elemi mennyiségtan, valamint az elméleti fizika katedrák rendes tanára lesz. S ahogy telnek az évek, szakelőadásainak témaköre rendkívül kiszélesedik. Azt, hogy milyen tanár volt Vályi Gyula, mit és hogyan tanított, hallgassuk meg a hiteles tanút, egykori diákját, Dávid Lajost, aki a következőket írja volt professzoráról:

„Vályi Gyula előadásainak egy teljes ciklusa a következő volt: algebrai analízis; trigonometria; elemi függvénytan; algebra; analitikus geometria; invariánsok elmélete; számelmélet; algebrailag megoldható egyenletek; algebrai görbék és felületek; Bolyai János Appendixe. És minden félévben: elemi mennyiségtani gyakorlatok; matematikai szeminárium.

Előadásaiban kizárólag matematikus volt, tartózkodván, pl. minden filozofikus megjegyzéstől. A legapróbb részleteket is türelmesen végigkövette kalkulatorikusan, és rendkívüli biztonsága a számolásban ritkává tette a tévedéseket. Tekintélyes anyagot nyújtott, igen áttekinthetően csoportosítva. A gondos elrendezés meg elsőrangú emlékezőtehetsége lehetővé tették, hogy előadásait mindenféle jegyzet nélkül tartsa, amire különben nagyfokú rövidlátása is kényszeríttette. Előadásai nem voltak merev, változatlan rendszerek. A felolvasói által közvetített irodalomból évről évre ki tudta választani és beolvasztani azt, ami kollégiumait tökéletessé tette. Így évek során több előadása még a hallgatói által kiadott, nem eléggé hű másolatban is igen használható tankönyvvé jegecesedett ki. Csak két előadása volt, amely kevéssé változott. Egyik az elemi függvénytan, melyben egykori mesterét, Weierstrasst követte; ebbe volt beleszőve az elliptikus függvények elmélete is. Másik ilyen előadása Bolyai János Appendixe, melyben különösen kezdetben ragaszkodott e mestermű paragrafusaihoz sorrendben is, tartalomban is. Két jellemző és életteljes emlékjel volt e két előadás.

A két nagy mintaképnek megfelelően tiszta és szigorú tárgyalásra törekedett valamennyi előadásában. És viszont hallgatóitól is hasonlót követelt. Bár nagy jóindulattal és türelemmel kérdezett, de általános kijelentések, jellemzések helyett mindig a pozitív részletekre, tényleges bizonyításokra helyezte a súlyt. Nem kérdezett ötletszerűleg, hanem kérdései átgondolt, tervszerű eszközök voltak a jelölt tudásának kipuhatolására.

Hallgatói szerették. Nem zárkózott el előlük. Mindig szívesen meghallgatta ügyüket, pedig sokszor nem egyetemi vagy tudományos dolgokról volt szó. És szívesebben segített, mint nem. Talán azt tartotta irányadóul, hogy a szánalom gyakran helytelenül ítél, de mindig helyesen cselekszik. Sötét, síkos téli időben, matematikai szeminárium után, akadt is mindig önként egy-egy hallgató, ki karonfogva hazavezette, hogy rossz lábával s még rosszabb szemével baj ne érje. Az őszinte ragaszkodás csöndes kifejezése volt ez is az iránt, akivel szemben sohasem nyílt alkalom zajos ünneplésre, tetszésnyilvánításra."

Nem kétséges, hogy Dávid Lajos Bolyaiak iránti későbbi ügyszeretetét és kutatásait nagymértékben befolyásolták volt professzorának ilyen irányú tevékenysége, melyet Szénássy Barna is a következőképpen méltat:

„Vályi Gyulának – a számelméleti kollégiumok mellett – két előadása vált híressé. Az egyik a komplex függvénytani, amelyet – mint általában a többi kollégiumait is – bizonyos időközönként megismételt, állandóan csiszolva, mélyítve a bemutatásra kerülő anyagot. Haar Alfréd szerint azokban az időkben talán sehol sem tárgyalták magasabb szinten a komplex függvénytant.

A másik – matematikai kultúránk fejlődése szempontjából az előbbinél még jelentősebb – kollégiuma Bolyai János Appendixéről szólt. Ezt először az 1891/92 tanév második félévében tartotta, ettől kezdve csaknem változatlan formában négyévenként többször megismételte. Élvezetes, szép olvasmány az

előadásról készült, megfakult százkét lapos litografált jegyzet. Eszerint Vályi Gyula kollégiumának mintegy harmadát a történelmi előzmények ismertetésére fordította, majd az Appendixet kommentálta, a paragrafusok sorrendjében haladva előre. A bizonyításokat kiegészítette, a rendkívül tömör fogalmazást – magyarázó részek közbeiktatásával – feloldotta. Helyenként – az abszolút és hiperbolikus geometria összehasonlítása céljából – kölcsönzött Lobacsevszkij eredményeiből is.

Kétségtelenül Vályi Gyula buzgó munkásságának köszönhető, hogy Brassai Sámuel minden gáncsoskodása ellenére, Kolozsvár a Bolyai-kultusz fellegvára lett, és hogy kartársai és tanítványai közül többen is eredményesen vettek részt a két Bolyai megismertetésének munkájában."

Az általa előadott tárgyak és témák sokoldalúsága, tudományos vizsgálataiban is tükröződik. Eredeti kutatásai kiterjednek a parciális differenciálegyenletek, projektív és analitikus mértan, elemi matematika valamint a számelmélet területeire. Legtöbb dolgozatának témája a projektív geometria tárgyköréhez tartozik, melyekben főleg a többszörös perspektivítás és a polárreciprocítás tulajdonságainak a vizsgálatával foglalkozik. Sajnos ilyen irányú munkáira kevésbé figyeltek fel, holott ezek alapján úgy tűnik, hogy személyében a legnagyobb magyar projektív geométert tisztelhetjük. Gazdag tudományos tevékenysége elismeréseként a Magyar Tudományos Akadémia 1891-ben levelező tagjai közé választotta.

Abban az időben Magyarországon, a matematikai oktatás szempontjából a legjobb és legképzettebb tanárok a kolozsvári Tudományegyetemen tanítottak. Vályi Gyula kollégái között ott találjuk Martin Lajost, Réthy Mórt, Schlesinger Lajost, Klug Lipótot, Farkas Gyulát, Fejér Lipótot, majd közvetlen utódait Haar Alfrédot és Riesz Frigyest. Maga Vályi is nemcsak tudós, hanem kitűnő pedagógus volt. Óráin oly érthetően és szépen adott elő, hogy tanítványainak a jegyzetei alapján nem volt nehéz összeállítani a didaktikai jellegű munkáit, melyekből később diákgenerációk tanulhattak. Korszerű egyetemi előadásai alkalmával nemcsak a legújabb eredményeket, hanem saját kutatásainak több eredményét is tartalmazták. A már hagyományos régebbi ismeretekbe mesteri ügyességgel tudta az új gondolatokat beépíteni. Kizárólag a matematikának, valamint oktatói hivatásának élt. Valószínűleg testi fogyatékosságai gátolták abban, hogy megnősüljön, annak ellenére, hogy mindvégig vonzódott a meleg családi környezethez, féltőn ragaszkodva szüleihez, testvéreihez és azok gyerekeihez. A kiváló matematikus zenerajongó is volt. Fejér Lipót, aki 1905-ben került a kolozsvári Tudományegyetemre, a következőket írta Vályiról: „Gyönyörködtem matematikai szellemében, valamint zenei hallásában és a zenei irodalomban való nagy jártasságában, mely jártasság annál feltűnőbb nála, mert sohasem gyakorolta volt a zenét."

Családi környezetében a rövid időn belül sűrűn ismétlődő halálesetek, tudományos munkásságára is kihatottak. Életének utolsó másfél évtizedében már alig jelenik meg egy-egy tudományos dolgozata. Teljesen szabadon adott

elő mindig. Így 1911-ben villámcsapásként éri az a kisiklás, amikor kitűnő emlékezőtehetsége az egyik előadásának alkalmával cserbenhagyja. Kétségbeesésében azonnal beadja lemondását, és nyugdíjaztatását kéri. Az egyetem vezetősége és a kollégák próbálták lebeszélni az 56 éves tudóst, de a lelkiismeretes és korrekt professzor hajthatatlan maradt. „Már tíz évvel ezelőtt kellett volna lemondanom" mondogatta a noszogatások alkalmával, és gyakran hivatkozott egykori berlini professzorára, Kummerre, aki hasonló eset miatt vált meg katedrájától. Elhatározását azonban sokan elhamarkodottnak találták.

Réthy Mór, a Vályi család őszinte barátja, akit idővel áthelyeznek a budapesti Műszaki Egyetemre, a nyári szünidők alkalmával gyakran visszatér Kolozsvárra, és ilyenkor mindig meglátogatja volt kollégáját. Íme hogyan ír az utolsó ilyen találkozásukról: „Az 1912. és 1913. nyári szünidőben volt alkalmam őt Kolozsvárt látni; 1912-ben látogatásaimat még kétszer visszaadta kertemben; 1913-ban már székében, bátyja kertjében ülve fogadott, és mindjárt az első látogatásom alkalmával bocsánatot kért, hogy azt vissza nem adhatja. Annál gyakrabban kerestem én fel; beszélgettünk a múltról, szó esett doktori értekezéséről, és ekkor mondta el nekem azt a történetet, amikor dolgozatát Weierstrassnak is megküldte. Nem gondoltam, hogy ezután soha többé nem látom. Oly élénken társalgott, olyan életkedvvel és bölcsen szólt minden kérdéshez, hogy rá se lehetett gondolni, hogy utolsó napjai oly közel esnek. 1913. szeptember első napjaiban vettem tőle búcsút a viszontlátás reményében."

A közeli barát visszatért Budapestre. 1913. október 13-án este őhozzá is eljutott a hír, miszerint Vályi Gyula aznap reggel meghalt. Hozzátartozói, ismerősei, az egyetemi ifjúság valamint tisztelői 1913. október 15-án vesznek tőle örök búcsút a kolozsvári Házsongárdi temetőben. A Magyar Tudományos Akadémia részéről a nagy tudós ravatalánál Tangl Károly mond búcsúbeszédet.

Befejezésként idézzünk még néhány sort Réthy Mórnak Vályi Gyuláról írt feljegyzéseiből: „Nála munkaszeretőbb, őszintébb, igazabb embert, ragaszkodóbb és önzetlenebb barátot nem ismertem; részt vett barátai örömében és bánatában, s ha valamely kérdésben megakadva barátja hozzáfordult, az ő tudományának mélysége és bámulatos nagy esze rendesen megtalálta, és igaz, jó szíve, egyenes lelke meg is adta a helyes választ. Mind kolléga, mindenkor igazságos, concilians és figyelmes volt; soha senkit meg nem bántott, és ha valakinek, akkor neki bizonyára soha ellensége nem akadt. Minden tekintetben elsőrendű ember volt: nyugodt, okos, higgadt, tetőtől talpig jó, egyszóval a bölcs, becsületes magyar ember mintaképe."

Könyvészet

1. Weszely Tibor, *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1983.

Vályi Gyula projektív geometriai kutatásai

Weszely Tibor
Sapientia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar, Marosvásárhely
Email: weszely@rdslink.ro

Vályi Gyula eredeti tudományos dolgozatainak nagy része a projektív geometria tárgyköréhez tartozik. Ha számba vesszük más magyar matematikusok ilyen irányú munkáit is (mint például Hunyady Jenő, Kerékjártó Béla, Szőkefalvi-Nagy Gyula stb.), akkor úgy tűnik, hogy Vályi Gyula személyében a legnagyobb magyar projektív geométert tisztelhetjük. A projektív geometria fejlődésének súlypontja a 19. századi évekre esik, így kétségtelen, hogy legnevesebb művelőit is ebben a korban kereshetjük. Érdekes ténynek tűnik, hogy az említett század utolsó évtizedeiben mind nyilvánvalóbbá vált a projektív geometria jelentős szerepe a nemeuklideszi geometriák interpretációjánál (lásd a nemeuklideszi geometriák modelljeit), Vályinál viszont, aki behatóan foglalkozott Bolyai János Appendixének ismertetésével a kolozsvári tudományegyetemen, nem találunk erre vonatkozó vizsgálatokat. Lehet, hogy az erre vonatkozó akkori eredményekről nem szerzett tudomást.

Több tudományos közleménye foglalkozik a többszörösen perspektív helyzetű háromszögek vizsgálatával. Desargues tétele szerint, ha két háromszög megfelelő csúcspontjait összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen vannak. Ilyen esetben a két háromszöget perspektívnek mondjuk. Már Vályi előtt ismert volt az a tétel, miszerint ha két háromszög, az ABC és az $A'B'C'$ perspektív helyzetű, akkor mindig található egy olyan kúpszelet, amelyre vonatkozóan a két háromszög polárreciprok: vagyis, az A, B, C csúcspontok polárisai a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ oldalak, az A', B', C' csúcspontok polárisai pedig a BC, CA, AB oldalak. Vályi az első projektív geometriai közleményében e tétel továbbfejlesztését tűzi ki. Azt az esetet veszi vizsgálat alá, amikor a két háromszög többszörösen perspektív, vagyis a két háromszög más csúcspárait összekötő egyenesek is egy pontban találkoznak. Mivel hat ilyen eset lehetséges, beszélhetünk a két háromszög r-szeres perspektivításáról, ahol r lehet 1, 2, 3, 4 vagy 6, mivel kimutatott tény, hogy 5-szörös perspektivítás nem létezhet. Rosanes és Schröter vetette fel azt az ötletet, hogy érdemes lenne megvizsgálni a mindegyik perspektivításnak megfelelő r számú kúpszelet egymáshoz való viszonyát. E problémakör analitikus úton történő teljes vizsgálatát Vályi Gyula végezte el. Így jut el a következő tételekhez:

Ha két háromszög kétszeresen perspektív (például az AA', BB', CC' valamint az AA', BC', CB' egyeneshármasok találkoznak egy-egy pontban), akkor a perspektivításnak megfelelő két kúpszelet kétszeresen érinti egymást; az érintési húr az AA' egyenes.

Négyszeres perspektivítás esetén a kúpszeletek külön-külön kétszeresen érintik egymást, és egy kúpszeletnek a másik hárommal keletkezett érintési húrjai az illető kúpszeletet meghatározó perspektivítási egyeneshármasok.

Vályi továbbá kimutatja, hogy: háromszoros perspektivítás esetén a kúpszeletek általában nem érintik egymást, hatszoros perspektivítás pedig, csak képzetes háromszögek esetében lehetséges, és a hat kúpszelet közül legfönnebb négy lehet valós.

Vályi kiterjesztette hasonló vizsgálatait a tetraéderekre is. Két tetraéderről akkor mondjuk, hogy perspektív, ha a megfelelő csúcspontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást (amely a perspektivítás középpontja vagy centruma). Ekkor a megfelelő élek metszik egymást, és ezek a metszéspontok egy síkban fekszenek, mely síkot a perspektivítás síkjának nevezzünk. A többszörösen perspektív tetraéderekre vonatkozó vizsgálataiból említsük itt meg az egyik kimondottan szép Vályi-tételt:

Két tetraéder négyszeres perspektivítása esetén, a négy perspektivításnak megfelelő négy sík egy harmadik tetraédert származtat, amely az előbbi két tetraéderrel olyan rendszert alkot, hogy ezek közül bármelyik kettő négyszeresen perspektív, és a perspektivítás centrumai a harmadik tetraéder csúcspontjai, lapjai pedig a perspektivítás síkjai.

Két tetraéder perspektív helyzetének általánosított vizsgálatainál kibővíti az egy pontba összefutó egyenesek (sugársor) fogalmát a lineáris sugársor fogalmával. Vályi kimutatja, hogy a lineáris sugársornak három típusviszonya létezhet:

1) perspektív viszony (egy pontba összefutó egyenesek),

2) kétszöges viszony,

3) hiperbolikus viszony.

Ezt követően az olyan tetraéderpárokat vizsgálja, amelyeknek megfelelő csúcspontjait összekötő egyenesei a 2) illetve a 3) lineáris sugársor elemei.

A harmadrendű görbék elméletéhez című dolgozatában a harmadrendű görbébe írt perspektív háromszögek tanulmányozásával foglalkozik. Azokat a háromszögeket nevezi harmadrendű görbébe írt háromszögeknek, melyeknek csúcspontjai egy ilyen görbén találhatók. Kezdetként meghatározza, hogy mit értünk a harmadrendű görbébe írt perspektív háromszögeken. A görbe P pontjából annak A pontját vetíteni annyit jelent, mint megkeresni a PA egyenesnek a görbével való harmadik A' metszéspontját. A görbén található pont önmagából való vetületén e pontban a görbéhez húzott érintőnek a görbével való harmadik metszéspontját értjük – mely pontot az adott pont tangenciális pontjának nevezhetjük. Az ABC háromszög perspektív az $A'B'C'$ háromszöggel, ha egyik a másiknak a görbe valamely pontjából (mint perspektivítási középpontból) való vetülete. Ezután két ilyen háromszög többszörös perspektivítását veszi vizsgálat alá. Többek között kimutatja, hogy kétszeres perspektivítás esetén automatikusan a háromszoros perspektivítás lép fel. Erre az

esetre vonatkozó tétele sokban emlékeztet a már említett négyszeresen perspektív tetraédereknél megállapított tulajdonságra:

Ha egy harmadrendű görbébe írt ABC és $A'B'C'$ háromszögek háromszorosan perspektívek, és a megfelelő perspektivítási középpontok A'', B'', C'', akkor az ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ háromszögek egy olyan rendszert alkotnak, hogy bármelyik kettő háromszorosan perspektív, s az illető perspektivítási centrumok a harmadik háromszög csúcspontjai. Az ilyen három háromszöget a továbbiakban triásznak nevezi. Ilyen irányú vizsgálatait ezután nemcsak a harmadrendű görbékbe írt háromszögekre, hanem ezekbe írt sokszögekre is kiterjeszti. Az effajta többszörösen perspektív sokszögeket r-ásznak (triász, tetrász, pentász stb.) nevezi. Ezt követően az olyan harmadrendű sokszögekkel kezd foglalkozni, amelyeknek mindegyik csúcspontja a megelőzőnek tangenciális pontja. További kutatásait kiterjeszti a térbeli negyedrendű görbék esetére is, melyek tanulmányozásánál felhasználja a Weierstrass-féle $p(u)$ függvényt. Igen komoly eredeti eredményeket közöl a *Többszörös involúció* címet viselő három egymás utáni dolgozatában, amelyek közül az első az akadémiai székfoglaló előadásának a tárgyát is képezte. Projektív geometriai dolgozatai közül még meg kell említenünk azokat, amelyek a pont- és egyenes-rendszerek közötti többszörös polárreciprocítás tanulmányozására vonatkoznak.

Itt csak egy hézagos, rövid és matematikai számítások nélküli ismertetőt nyújtottunk, amire az előadás megszabott rövid időtartama is kényszerített. Aki részletesebben szeretne tájékozódni Vályi Gyula ilyen irányú értékes tevékenységéről, annak őszinte szeretettel ajánlanám, a Kriterion könyvkiadó gondozásában, 1983-ban megjelent *Vályi Gyula élete és munkássága* című kis monográfiám erre vonatkozó részét [1].

Könyvészet

1. Weszely Tibor, *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1983.

Vályi Gyula differenciálegyenletekkel kapcsolatos munkáiról

Bege Antal
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Kar
Email: bege@math.ubbcluj.ro

Előzmények

Vályi Gyula 1873-ban iratkozik be a kolozsvári egyetemre. Matematikai tehetségére nagyon hamar felfigyel Réthy Mór, aki már ekkor a fiatal hallgatóval referáltatja K. Jacobi és G. Monge tudományos munkáit. Ezek a tudományos tevékenységek valószinűleg kihatással voltak a későbi kutatásokra is.

Matematika-fizika szakos tanári oklevelet szerez 1877-ben, és ekkor Réthy Mór és Martin Lajos közbenjárásával a matematikai és természettudományi kar tanulmányi ösztöndíjat biztosít a fiatal matematikus számára Berlinbe. A berlini egyetemen Weierstrass, Kronecker, Kummer, Borchardt előadásait hallgatja, amelyeken más egyetemek hallgatói és középiskolai tanárok is részt vettek. Ezek az előadások valószinűleg szintén nagy jelentőséggel bírtak a későbbi kutatói munkában.

Valószinűleg berlini tartózkodása alatt írja meg első tudományos dolgozatait.

A XIX. század utolsó évtizedeinek egyik legdivatosabb feladata a repülés megvalósítása volt, és ezen belül egy minél jobb légcsavar megtervezése. Ezzel a témával Martin Lajos is foglalkozik, és Réthy Mór ösztönzésére berlini visszatérése után Vályi Gyula is bekapcsolódik a kutatásba.

A légcsavar gyakorlati megvalósítása során felmerült problémákból ered a doktori tézisének az anyaga is, de az kimondottan matematikai problémákkal foglalkozik.

1880-ben védi meg „A másodrendű partiális differentiális egyenletek elméletéhez” című doktori értekezést [1], amelyet 1906-ban újra kiadnak, és 1910-ben Schlesinger Lajos segítségével német nyelvre is lefordítanak [2]. 1881-ben doktorrá avatják és ugyanebben az évben a kar megadja a magántanári címet.

A doktori tézis megvédése után még néhány dolgozatot publikál a differenciálegyenletek témakörben [3], [4], [6].

Eredmények

Először a doktori tézis [1] eredményeit foglaljuk ösze. A tézis három részből áll. Az elsőben a

$$\int_\Omega V\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

variációs feladat szélsőértékeinek a vizsgálatával foglalkozik.
A megoldás szükséges feltétele (Euler-féle egyenlet)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)=0.$$

Ezt a

$$p=\frac{\partial z}{\partial x};\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

jelölésekkel a következő alakban írhatjuk fel:

$$r\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\cdot+2s\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial q}+t\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}=0.$$

A Monge-féle módszer segítségével Vályi Gyula szükséges és elégséges feltételt kap a fenti másodrendű egyenlet elsőrendűre való visszavezetésére:
• *A másodrendű egyenlet akkor és csakis akkor vezethető vissza elsőrendű parciális differenciálegyenletre, ha*

$$-2D\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}+2D^3\frac{\partial^2 D}{\partial P^2}+3\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2+D^2\left(\frac{\partial D}{\partial P}\right)^2=0,$$

ahol

$$D=\sqrt{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial q}\right)^2-\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}},\ P=\frac{\partial V}{\partial p}$$

A dolgozat második részében eljárásokat ad meg a visszavezetésre, míg a dolgozat befejező részében konkrét példákon mutatja be az előző részekben megfogalmazott eredményeket. Így például a következő $V=V(p,q)$ függvényeket vizsgálja:

$$V=\sqrt{p^2+q^2}$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{q+1}\right)^2$$

A [3] dolgozatában a következő parciális differenciál egyenletrendszer megoldását határozza meg

$$\begin{cases} F_1\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0 \\ F_2\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0 \end{cases}$$

A másodrendű parciális deriváltak elsőrendű deriváltak segítségével való felírásának a feltétele

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial y} + q\dfrac{\partial r}{\partial z} + s\dfrac{\partial r}{\partial p} + t\dfrac{\partial r}{\partial q} = \dfrac{\partial s}{\partial x} + p\dfrac{\partial s}{\partial z} + r\dfrac{\partial s}{\partial p} + s\dfrac{\partial s}{\partial q} \\ \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} + p\dfrac{\partial t}{\partial z} + r\dfrac{\partial t}{\partial p} + s\dfrac{\partial t}{\partial q} = \dfrac{\partial s}{\partial y} + q\dfrac{\partial s}{\partial z} + s\dfrac{\partial s}{\partial p} + t\dfrac{\partial s}{\partial q} \end{cases} \tag{1}$$

Így a megoldást

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

alakban keresve, a feltételeket úgy kapjuk meg, hogy az (1) összefügésbe a következő helyettesítéseket végezzük:

$$r \rightsquigarrow \frac{D(F, F_1, F_2)}{D(s, t, .)}, s \rightsquigarrow \frac{D(F, F_1, F_2)}{D(r, t, .)},$$

$$t \rightsquigarrow \frac{D(F, F_1, F_2)}{D(r, s, .)}.$$

A fentiek alapján Vályi Gyula a következő eredményt bizonyította

• *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenletrendszernek legyen közös integrálja az, hogy az $F = F_1$ és $F = F_2$ megoldásokon kívül más megoldása is legyen, és ekkor a megoldás meghatározható elsőrendű parciális differenciálegyenletek integrálásával.*

A dolgozat befejező részében az eredmények alkalmazására a következő egyszerű egyenletrendszert tanulmányozza a szerző:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$$

Megjegyzés

Az egyetemen többféle matematikai tanárgyat tanított (Az algebrai egyenletek elmélete, Elemi függvénytan, Analítikus geometria, Bolyai János Appendixe, Trigonometria, Invariánsok elmélete, Számelmélet). Kutatásai kiterjedtek a differenciálegyenletek, projektív és analítikus mértan (dolgozatai nagy része), számelmélet valamint az elemi matematika témakörökre [7]. A fentiek és a differenciálegyenletek terén végzett kutatásai alapján azt mondhatjuk, hogy tudományos munkásságának jellemző vonásai a sokoldalúság, „érzékenység” az elemi feladatok iránt, a bizonyítások „tisztasága” és tömörsége.

Könyvészet

1. Vályi Gyula, *A másodrendű partiális differentiális egyenletek elméletéhez,* (Doktori értekezés), Kolozsvár, 1880.

2. Vályi Gyula, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordning, *Arch. der Math. und Phys.,* **15** (1910), 294–304.

3. Vályi Gyula, A két független változós másodrendű simultán parziális differenziális egyenletek integrálásáról, *Math. és Term. Tud. Ért.*, **1** (1882), 309–312.

4. Vályi Gyula, Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Journal für reine und angew. Math.*, **95** (1883), 99–101.

5. Vályi Gyula, Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Arch. der Math. und Phys.,* **70** (1883), 219–233.

6. Vályi Gyula, Zusats zum Aufsatze: Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Arch. der Math. und Phys. (2),* **1** (1884), 109–110.

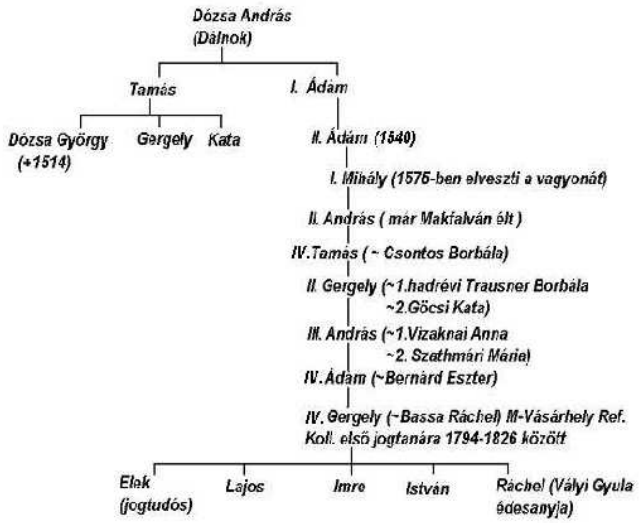
7. Weszely Tibor, *Vályi Gyula élete és mukássága*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1983.

Adalékok a Vályi-kutatáshoz

Oláh-Gál Róbert
BBTE Kolozsvár, Matematikai és Informatikai Kar
Csíkszeredai Főiskola
Email: olahgal@nextra.ro

Vályi Gyula, Dózsa György unokaöccse

Kevesen tudják, hogy Vályi Gyula Bolyai János után Erdély legnagyobb matematikusa, és talán még kevesebben, hogy a nagy hadvezér és lázadó Dózsa György 9. rendű unokaöccse. A mellékelt részcsaládfa-rajzon látható a Dózsa család genealógiájának azon része, amelyet Vályi Gyuláig vezettünk le: Vályi Gyula székely származású világhírű matematikus. (Tudvalevő, hogy a Bolyai család nem székely, hanem ősi magyar család, egyes vélemények és a nagy Bolyai János szerint is, Töhötöm vezér ükunokája, Buja volt a Bolyai család megalapítója). Vályi Gyula a megerősödött kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem matematikaprofesszora, de nevét azzal tette halhatatlanná, hogy elsőként írta le matematikailag a légcsavar aerodinamikáját. A matematika több ágában is maradandót alkotott, de szerény tudósként és a Bolyaiak árnyékában, neve a nagyközönség előtt ismeretlen. E kis tanulmányban megpróbáljuk bemutatni tudósi és tanári nagyságát.



Vályi Gyula 1855. január 25-én született Marosvásárhelyen, a „postahivatalban". Ugyanis édesapja, Vályi Károly volt a postamester és családi házukban működött a postahivatal. Abban az időben, a posták államosításáig, a postamesterséget örökölték, és közel száz évig, 1780-1880 között,

Marosvásárhelyen a Fazekasok utcájában a 864-es számú házban működött a postahivatal. Ezt a postahivatalt és mesterséget, Vályi Károly édesanyjától, özv. Szentistváninétól örökölte. Marosvásárhelyen, a Fazekasok utcája a mai Borsos Tamás utca, és a postahivatal a Református Temető bejáratához közel lehetett, szemben a Fürdő utcával. (A Borsos Tamás utca az, amelyik a Telekitéka épületét összeköti a Református temető bejáratával).

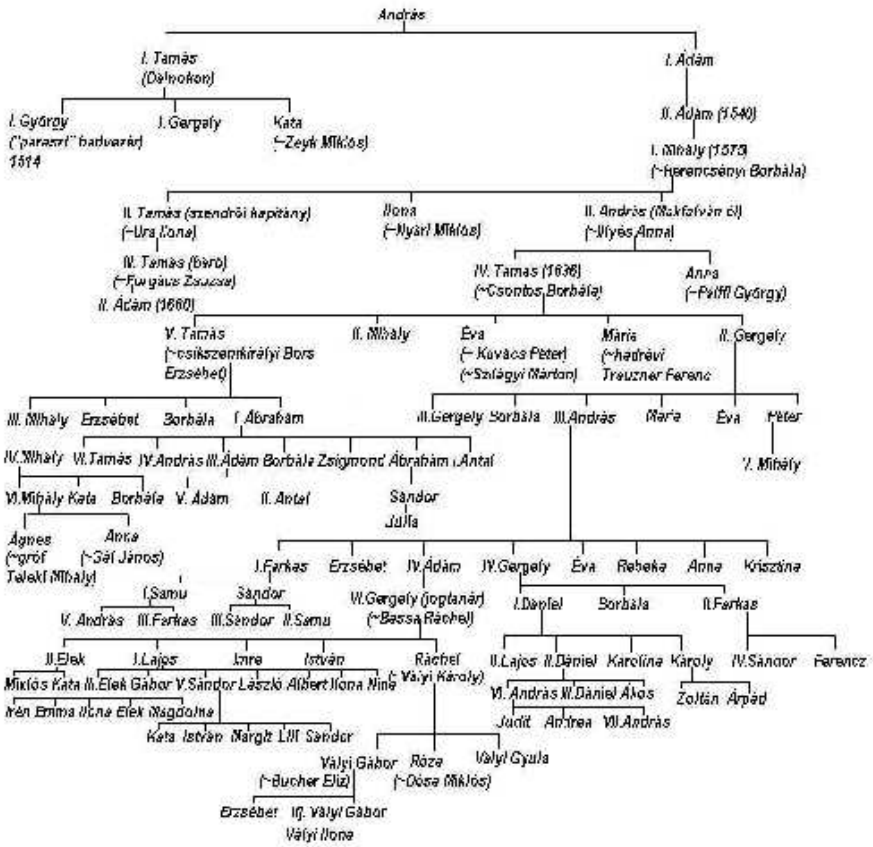
Érdemes szólnunk arról, hogy Vályi Károly a református Kollégiumban végzett, és Bolyai Farkasnak egyik kedves tanítványa volt. Két dokumentum is igazolja ezt, az egyik Bolyai Farkas egy Vályi Károlynak dedikált Tentamen műve, a másik Bolyai Farkas kéziratai között a Teleki-Bolyai könyvtárban található jegyzet Bolyai Farkas egyik előadásáról, ami Vályi Károly lejegyzésében maradt meg. Vályi Károly jogot végzett és törvényszéki ítélőmester is volt. Vályi Károlynak Dósa Ráchellel kötött házasságából született Gábor (1844-1926) jogászprofesszor, Róza (1851-1900) és Gyula (1855-1913).

Gyulának a Református Kollégiumban a természettan és matematika tanára Mentovich Ferenc, az ismert költő és tudós, Nagykőrösön Arany János kollégája volt, számos irodalmi és természettudományi mű szerzője. Nem tévedünk, ha azt állítjuk, döntő szerepe lehetett Mentovichnak abban, hogy Vályi Gyulából világhírű matematikus lett. Talán Mentovich legtehetségesebb tanítványa Vályi Gyula volt. Sajnos Gyula gyermekkorában eltörte a lábát és egy hibás orvosi beavatkozás miatt élete végéig sánta maradt. Ezenkívül szembetegsége is volt, és orvosi javaslat szerint naponta csak néhány órát olvashatott és írhatott. Két ilyen kereszttel mégis maradandót alkothatott az erdélyi tudományosság dicsőségére. Az érettségi után a frissen megalakult Kolozsvári Egyetemre került, és Brassai Sámuel, Réthy Mór és Martin Lajos tanítványa volt. Az egyetemen is kiváló hallgató, és az egyetem elvégzése után az akkori tudományos világ matematika-fellegvárába került ösztöndíjasként a világhírű „koponyahármashoz" Karl Weierstrass (1815-1893), Leopold Kronecker (1823-1891) és Ernst Kummerhez (1810-1893).

Vályi hazatérése után 1880-ban írta meg doktori disszertációját *A másodrendű partiális differentiális egyenletek elméletéhez* címmel. Ennek lényegi része, hogy a légcsavar felületi alakjának aerodinamikáját matematikailag jellemezni tudta. Vályit röviddel ezután 1881/82-től kinevezik a kolozsvári egyetem magántanárává, és harminc évig szolgálja hűséggel az egyetemet, 1911-ig. Akkor ő maga kéri nyugdíjaztatását. Ugyanis mindig fejből, segédanyagok és jegyzet nélkül tanított, és amikor emlékezete legelőször cserben hagyta, azonnal kéri nyugdíjaztatását. Rá két évre, 1913-ban, akárcsak Bolyai János, 58 évesen halt meg, és a Házsongárdi temetőben alussza örök álmát. Tudásánál csak szerénysége és jámborsága volt nagyobb.

Most néhány szót a Dózsa családról, Vályi Gyula anyai ágáról. Ennek bemutatását Sándor Imre *Makfalvi és uzapaniti Dózsa család* c. dolgozatából idézzük [1].

„A család szakadatlan nemzedékrendét a XV. században élt Andrástól ismerjük, kinek fiai a Háromszéken Dálnokon lakó Tamás és Ádám, kikről Kővári László és Nagy Iván azt állítják, hogy Magyarországon lakott, ez azonban tévedés. A Dózsa család Magyarországra költözése szoros összefüggésben van Békés Gáspár fölkelésével, kinek ügyéért az itt említett Dózsa Ádám fia: Mihály is kardot rántott s a szentpáli csata után birtokait veszítve, földönfutóként hagyta oda ősi kúriáját s abba Balog Ferenczet ültetik a Báthoriak. Magyarországra költözik, a Báthoriak pártjára áll s Báthori István oldala mellett vérzik el. 1579. nov. 2-án Báthori István lengyel király ezeket írja Báthori Kristóf erdélyi fejedelemnek: Dózsa Mihály, ki Békés Gáspár lázadása alkalmával jószágait elvesztette, előbbi vétkét hűséges szolgálattal és hálával eltörölte. Azért az ő özvegyének és gyermekeinek a jószágait vissza kell adni s Balog Ferencz másképen elégítendő ki. Főleg az udvarházat adják vissza hamar, hogy ne kellejen lakhely nélkül bujdosniok. (Tört. Tár. 1895.255,256.) Mihály fiai közül András tér vissza az ősi birtok visszafoglalására."



Amint a mellékelt ábrán is követhető, Vályi Gyulának anyai nagybátya a híres jogtudós Dósa Elek volt. A Fazekas utcában pedig szomszédjuk volt Dósa Lajos. A Dósa család ezen ága híres jogászdinasztia. (Dósa Elek, Németh László *A két Bolyai* c. drámájában is szerepel, Bolyai Jánossal való kapcsolatát egy más írásban ismertetem). Elek édesapja, Gergely az első aki az akkori Marosszék jogásztekintélye és a Református Kollégium tanára is. Tanszékére, halála után az Erdélyi Református Tanács a fiát nevezi ki 1839-ben. Fontos jogi szakértője az 1848-as forradalomnak is. Kedves anekdota, hogy 24 óra alatt egy kis birtokát Makfalván Wesselényinek ajándékozta, mert a képviselőnek birtokosnak kellett lennie a körzetében. Fő műve *Erdélyhon jogtudománya* 1861-ben jelent meg három kötetben. 1862-ben Marosvásárhely országgyűlési képviselője, és az országgyűlés alelnöke. Miklós fia is ismert jogász, a Királyi Tábla bírója.

Vályi Gyula szülőháza

A Ferenc József Tudományegyetem neves matematika professzora, a Lobacsevszkij-díjas Schlesinger Lajos, Bolyai János születésének 100. évfordulójára készülve felkutatta Bolyai János szülőházát.

A Dósa-ház. Itt lehettek a Vályi-féle házak.

A nemes tett példájára elhatároztam, hogy felkutatom Vályi Gyula szülőházát. Sajnos én nem vagyok olyan szerencsés, mint Schlesinger Lajos, mert élő tanúk már nem léteznek, és valószínű, hogy a ház sem áll már. Viszont a helyét jó volna minél pontosabban megtudni. Ezért alapos kutatásba kezdtem a Marosvásárhelyi Állami Levéltárban. Kiindulási pontom a posta volt, hisz

tudjuk, hogy Vályi Gyula apja postamester volt. Sajnos, semmi használható adat nem állt rendelkezésemre, csak öreg vásárhelyiek véleménye, miszerint az akkori posta a Szentgyörgy utcában lehetett. Ez a sejtés tévesnek bizonyult, és rá is ment nyolc órás levéltári munkám. Egyetlen adatra, amiből kiindulhattam, még a Bolyai János marosvásárhelyi házának felkutatásakor felfigyeltem: az összeírási íveken szerepelt, hogy Vályi Károly a 864-es számú házban lakott.

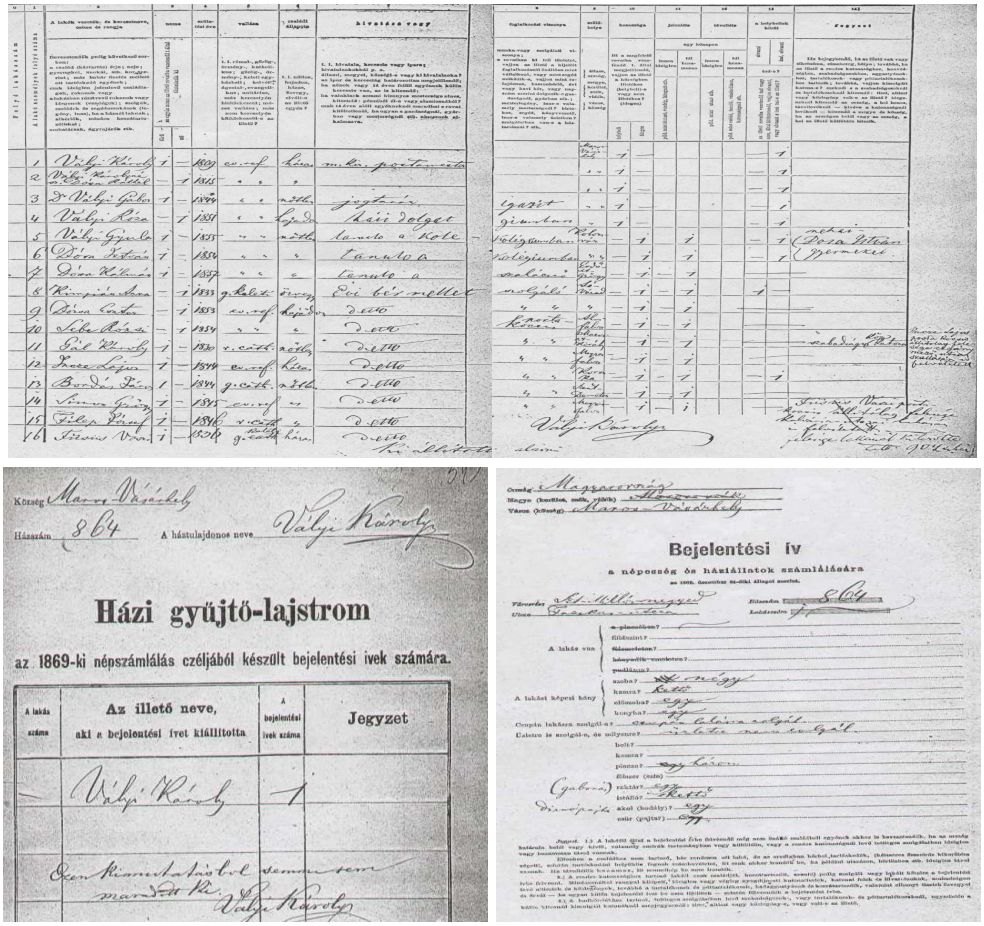
Így már elindulhattam, és végignézve a Szent Miklós fertály összes összeírási ívét 1869-ből, megtaláltam, hogy ez a ház az akkori Fazekasok, a mai Borsos Tamás utcában volt. De még hátra van pontos helyének a megjelölése! Úgy az akkori, mint a mostani Fazekasok (Borsos Tamás) utca egyik végén a Teleki Téka állt (és áll ma is), a vele szemközti utcasarok pedig az Unitárius Egyház tulajdona. Tehát a másik végétől érdemes elindulni. Sejtésem szerint inkább a Krizantém utcához volt közelebb az akkori postahivatal. Vályi Károlynak abban az időben több telke és ingatlanja volt egymáshoz közel, így ma már csak 30-40 m-es körzetben lehet megjelölni a házat. Ezért javasoltam a Borsos Tamás, Fürdő és Csorgó (ma Lt. Petru Popescu) utcák találkozásánál lévő zöld szigetet, mint alkalmasat, emlékoszlop vagy emléktábla elhelyezésére.

Álljon itt néhány összeírási ív, amely egyértelműen igazolja állításom! Az 1857-es összeírás egy részlete, abból a szempontból lehet érdekes, hogy kik voltak a szomszédok:

házszám	*tulajdonos*
868	Virág Domokos tulajdona, kert, épület és lakó nélkül
867	Vályi Károly tulajdona, kert, épület és lakó nélkül
866	Háztulajdonos Vályi Károly, lakó Kelemen Károly
865	Szőts József
864	Vályi Károly
863	Dr. Antal László tulajdona, de Bodor Pál lakik benne!
862	Dr. Antal László tulajdona, de Sándor Péter lakja
861	Dósa Lajos
860	Dósa Lajos
859	Dósa Lajos
858	Koncz Lajos
857	Ugrai Gyula, Dániel
856	Özvegy Nagy Jánosnő
855	Tőkés Sándor
854	Egyed Márton

Nos, Vályi Gyula szülőházának helye nemcsak a matematikusokat érdekelheti, hanem a helytörténészeket is, ugyanis ott működött közel száz évig az első marosvásárhelyi postahivatal. Weszely Tibor Vályi Gyuláról írt kitűnő könyvecskéjében a szülőházra nem találunk adatot. A kérdés az, hogy hol állt a 864-es számú ház, és ott született-e Vályi Gyula. Az 1857-es, 1869-es

és 1896-os összeírások többszöri átkutatása után egyértelműen kijelenthetem, Vályi Gyula, a Fazekasok utcájának 864. számú házában született. Hol állt ez a ház fizikailag? Megpróbálom a környezetben behatárolni, legalább annyira pontosan, mint Bolyai Farkas lakóházának helyét. Az említett Vályi-féle ház a mai Borsos Tamás utca azon részén állhatott, ahol a Csorgó és Fürdő utca a Borsos Tamás utcába torkollik. Valószínű azon az oldalon, ahol a rendőrség is székel a Krizantémok utca felőli részen.

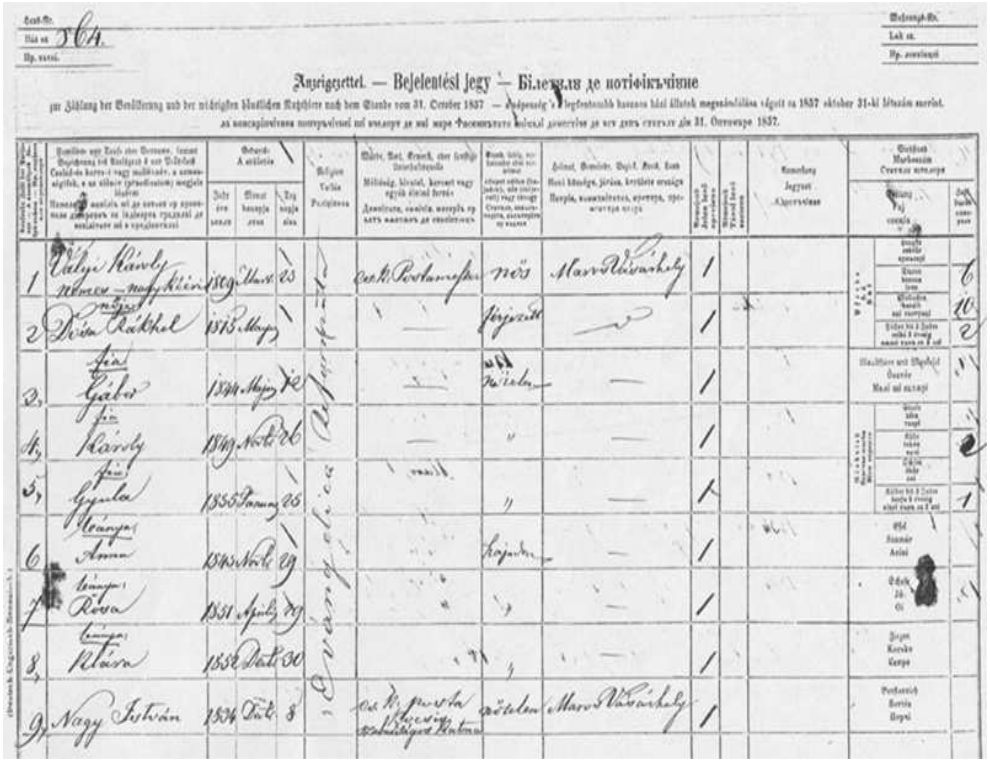


Összeírási ívek

Milyen értékes információkat tudunk még kiolvasni az összeírási ívekből? Vályi Károlynak 1869-ben volt 7 könnyű fajta kancája és 16 herélt, ugyancsak könnyű fajta lova. Öszvér, szamár, bika, tehén ökör nem volt, de volt 4 bivalya. Mivel postamester volt, könnyű lovasszekereket üzemeltethetett. Bivalyokra azért lehetett szükség még akkoriban Marosvásárhelyen, mert esős időben olyan nagy sár volt, hogy a beragadt szekereket bivalyokkal húzták ki. Innen a Sáros utca elnevezés is! Ezek a nagy kiterjedésű kertek, véleményem szerint valahol a Református temető szomszédságában lehettek. Mivel a Vályi Károly családja,

az akkori Marosvásárhely egyik leggazdagabb polgári családja volt, biztosan eljártak a szomszédságukban lévő „közferedőre”, ami ott volt a Fürdő utcában.

Lássuk egy kicsit részletesebben mit tudhatunk meg az összeírásokból. Először is ott laktak a postahivatal alkalmazottjai, postakocsisok, szolgálók, postaszolgák. Voltak köztük magyarok és románok is, ezért is békességben felállíthatják a tisztelgés emlékoszlopát. A mellékelt összeírási ív három nyelven készült, német, magyar és cirill betűs román nyelven. Rendkívül modern dolog 1857-ben!


Anzeigezettel. — Bejelentési jegy — Білетул де notificăreune

Háromnyelvű összeírás 1857-ből

Számomra ez, az első postahivatal helye azért is fontos és lényeges, mert a Bolyaiak is igen sokszor megfordultak benne. Egészen biztos, hogy itt adta fel Bolyai János a pályázatát a lipcsei Jablonowszki társaságnak, később a *Responsio* név alatt megörökített híres művét. Farkas is itt látta meg a postamesternél, kedves tanítványánál, Vályi Károlynál, hogy fia előtte már elküldte a pályázatát. (Ebből lett is egy kis nézeteltérés közöttük). De itt a postahivatal előtt Bolyai János sokszor elsétált, valószínűleg megnézte nincs-e levele, és továbbsétált a Teleki-tékába. Tudni kell, hogy Bolyai János is sokat levelezett, nem csak az édesapja. Azt már Weszely Tibor könyvéből tudhatjuk, hogy a Vályi családban a Bolyaiak nagy tiszteletnek örvendtek, és Réthy Mór szerint, az ő példájukra lett Gyulából matematikus. (Ugyanis egy olyan gazdag

polgári családban általában a fiúkból jogászok lettek. Főleg, hogy Vályi Gyula Dósa Elek unokaöccse volt!) Tudjuk, hogy Vályi Gyula és jogászprofesszor bátyja, Vályi Gábor Kolozsvárra költöztek, és ott vásároltak szép házat maguknak. Így már az 1892-es összeírásban, a Borsos Tamás utcában nem szerepel Vályi-tulajdon. Valószínű, hogy eladták a házat, hiszen akkor már a postahivatal a Főtérre költözött.

2005. január 25-én ünnepeljük Vályi Gyula matematikus születésének 150. évfordulóját. Vályi Gyula, minden bizonnyal, Bolyai János után Marosvásárhely második legnagyobb matematikusa és a már európai hírű Ferenc József Tudományegyetem első erdélyi matematikusa. Olyan matematikusok között mint Réthy Mór, Schlesinger Lajos, Farkas Gyula, Fejér Lipót, Riesz Frigyes, Haar Alfréd, Klug Lipót, egyedül Vályi volt erdélyi, a többiek mind magyarországiak voltak.

Az egyköpenyű hiperboloid a Vályi-féle tételben

Találóan jegyezte meg Dr. Sándor József docens kollégánk, hogy a Vályi-féle tömör bizonyítások Bolyai-örökség. A következő 5. tantétel [7] bizonyítása is ilyen Bolyai-féle. Hogy megértsük miről van szó, idézzük először a cikk elejét a megfelelő jelölésekkel:

„Legyenek a tetraéder szögpontjai A_1, A_2, A_3, A_4 és a rajtok átmenő magasságvonalak a_1, a_2, a_3, a_4. Legyenek továbbá az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ háromszögek magasságpontjaiban ezek síkjaira merőleges egyenesek b_1, b_2, b_3, b_4.

Feltesszük, hogy mind a négy szögpont végesben, de nem egy síkban van. Ezzel azt is kizártuk, hogy két magasság párhuzamos, három magasság egy síkkal párhuzamos legyen." Majd: „i, k, l, m egyik tetszés szerint vett permutációját jelentik az 1, 2, 3, 4 számoknak." Következzék most a tétel és bizonyítása:

„**5. tantétel.** *Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor egy egyköpenyű hyperboloidon vannak.*

Fektessünk át $a_ia_ka_l$ egyeneseken egy másodrendű felületet. Ez szükségképen egyköpenyű hyperboloid lesz, mert a három egyenes nem párhuzamos egy síkkal.

Minthogy a b-egyenesek az a-egyeneseket metszik, azok is rajta lesznek ezen a hyperboloidon valamint a_m egyenes is, a mely viszont a b-egyeneseket metszi."

Ezt a tételt szeretném egy picikét szemléletessé tenni, azáltal, hogy a tanulók és tanárok rendelkezésére bocsátunk egy olyan egyszerű Maple-eljárást, amivel ez az egyköpenyű hiperboloid könnyen megrajzolható. Az egyköpenyű vagy az egyköpenyű forgási hiperboloiddal találkozhatnak a tanulók Marosvásárhely határában, az *Azomureş* vegyikombinát hőközpontjai ilyen

alakúak, de Gyulakután is és Radnóton is vannak ilyen másodrendű felületek fizikai valóságban is. Az *Azomureş* vegyikombinátnál ezek a víz hűtésére szolgáltak.

Az egyköpenyű hiperboloid általános egyenlete:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z = b$$

és kanonikus alakja, ha a koordinátarendszer közepébe toljuk és forgatjuk, úgy, hogy az x, y, z tengelyek legyenek a szimmetriatengelyek:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Az egyköpenyű hiperboloid, akkor lesz forgási is, ha $a = b$. Az alábbi Maple-eljárásban csak a tetraéder négy csúcspontjának koordinátáit kell megadni és számítógép kirajzolja a szép másodrendű felületet, rajta a cián színnel a tetraéder magasságait és magát a tetraédert is. A Maple egy algebrai programnyelv, úgy is elképzelhetjük, mint egy egyszerű matematikai szakértői rendszert*, és többször szerepelt a Bolyai Nyári Akadémia előadásai között. Érdemes elsajátítani, régebbi verziói ingyen letölthetők az Internetről.

```
> Kopeny:=proc(x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4)
> with(linalg):
s1:=solve({innerprod([a1-x1,b1-y1,c1-z1],[x3-x2,y3-y2,z3-z2])=0,
    innerprod([a1-x1,b1-y1,c1-z1],[x4-x2,y4-y2,z4-z2])=0,
    det([[a1,b1,c1,1],[x2,y2,z2,1],[x3,y3,z3,1],[x4,y4,z4,1]])=0},
    a1,b1,c1}); assign(s1);
s2:=solve({innerprod([a2-x2,b2-y2,c2-z2],[x3-x4,y3-y4,z3-z4])=0,
    innerprod([a2-x2,b2-y2,c2-z2],[x4-x1,y4-y1,z4-z1])=0,
    det([[a2,b2,c2,1],[x1,y1,z1,1],[x3,y3,z3,1],[x4,y4,z4,1]])=0},
    {a2,b2,c2});assign(s2);
s3:=solve({innerprod([a3-x3,b3-y3,c3-z3],[x1-x2,y1-y2,z1-z2])=0,
    innerprod([a3-x3,b3-y3,c3-z3],[x4-x2,y4-y2,z4-z2])=0,
    det([[a3,b3,c3,1],[x2,y2,z2,1],[x1,y1,z1,1],[x4,y4,z4,1]])=0},
    {a3,b3,c3});assign(s3);
s4:=solve({innerprod([a4-x4,b4-y4,c4-z4],[x1-x2,y1-y2,z1-z2])=0,
    innerprod([a4-x4,b4-y4,c4-z4],[x3-x2,y3-y2,z3-z2])=0,
    det([[a4,b4,c4,1],[x2,y2,z2,1],[x1,y1,z1,1],[x3,y3,z3,1]])=0},
    {a4,b4,c4});assign(s4);
e1:=subs({x=x1,y=y1,z=z1},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e2:=subs({x=a1,y=b1,z=c1},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
```

*Az informatikában a szakértői rendszerek definíciója szigorúbb, ott megkövetelik, hogy egy szakértői rendszer önmagát is tudja tanítani, és egy már megoldott feladatot megjegyezzen és a későbbiekben alkalmazza. Erre a Maple nem képes, de a „tárgyi tudása félelmetes”.

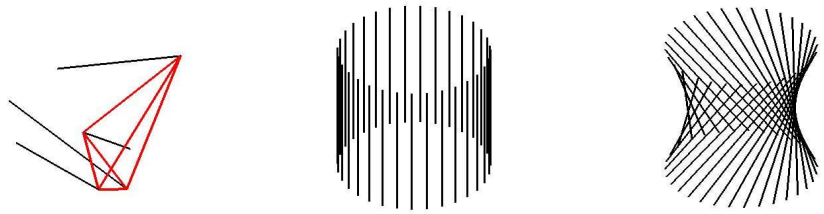
```
e3:=subs({x=x2,y=y2,z=z2},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e4:=subs({x=a2,y=b2,z=c2},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e5:=subs({x=x3,y=y3,z=z3},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e6:=subs({x=a3,y=b3,z=c3},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e7:=subs({x=x4,y=y4,z=z4},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e8:=subs({x=a4,y=b4,z=c4},a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
          +a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
e9:=subs({x=(x1+a1)/2,y=(y1+b1)/2,z=(z1+c1)/2},a11*x^2+a22*y^2
          +a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z+a23*y*z+a10*x+a20*y+a30*z=b);
veg:=solve({e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9},{a11,a22,a33,a12,a13,a23,
          a10,a20,a30});
b:=1;assign(veg);with(plots):
fe:=implicitplot3d(a11*x^2+a22*y^2+a33*z^2+a12*x*y+a13*x*z
         +a23*y*z +a10*x+a20*y+a30*z=b, x=x1-25..x4+25,
         y=y1-25..y4+25, z=z1-25..z4+25,numpoints=40000):
tetra:=pointplot3d([[x1,y1,z1],[x2,y2,z2],[x3,y3,z3],[x1,y1,z1],
           [x4,y4,z4],[x3,y3,z3],[x2,y2,z2],[x4,y4,z4]],
           style=line, color=red,thickness=4):
d1:=pointplot3d([[x1,y1,z1],[a1,b1,c1]],style=line,thickness=3,
          color=cyan):
d2:=pointplot3d([[x2,y2,z2],[a2,b2,c2]],style=line,thickness=3,
          color=cyan):
d3:=pointplot3d([[x3,y3,z3],[a3,b3,c3]],style=line,thickness=3,
          color=cyan):
d4:=pointplot3d([[x4,y4,z4],[a4,b4,c4]],style=line,thickness=3,
          color=cyan):
display(tetra,d1,d2,d3,d4,fe); end;
```

Néhány szót a `Kopeny` nevű Maple-eljárásról. A program adatai a tetraéder négy csúcspontjának koordinátái, tehát 12 darab szám. A program nem végez semmilyen ellenőrzést, arra nézve, hogy ez a négy pont alkothat-e tetraédert (nincsenek-e egy síkban, egy térbeli egyenesen, stb., ezzel a felhasználók kiegészíthetik). Első lépésben kiszámítjuk a négy magasság koordinátáit, mégpedig úgy, hogy kirójuk a magasság talppontja a szemközti oldallapra essen és merőleges legyen annak két metsző egyenesére (két vektorára). Ehhez megoldunk három darab, háromismeretlenes egyenletrendszert. Utána a változókhoz, hozzá kell rendelni a kiszámított számértékeket, hogy továbbra is tudjuk velük szimbolikusan dolgozni. Ezt végzi el az `assign` utasítás. Ha megvan a négy magasság két-két pontja, akkor felírjuk azt a másodrendű felületet, amely átmegy ezeken a pontokon. Még hozzávesszük valamelyik magasság felezőpontját, mert kilencismeretlenes egyenlet rendszert kell megoldanunk, és ahhoz szükségünk van kilenc egyenletre. A b szabad tag mint paraméter, sza-

badon megválasztható. (Általában homogén koordinátákkal is felírható egy másodrendű felület, de az nagyobb körültekintést igényel).

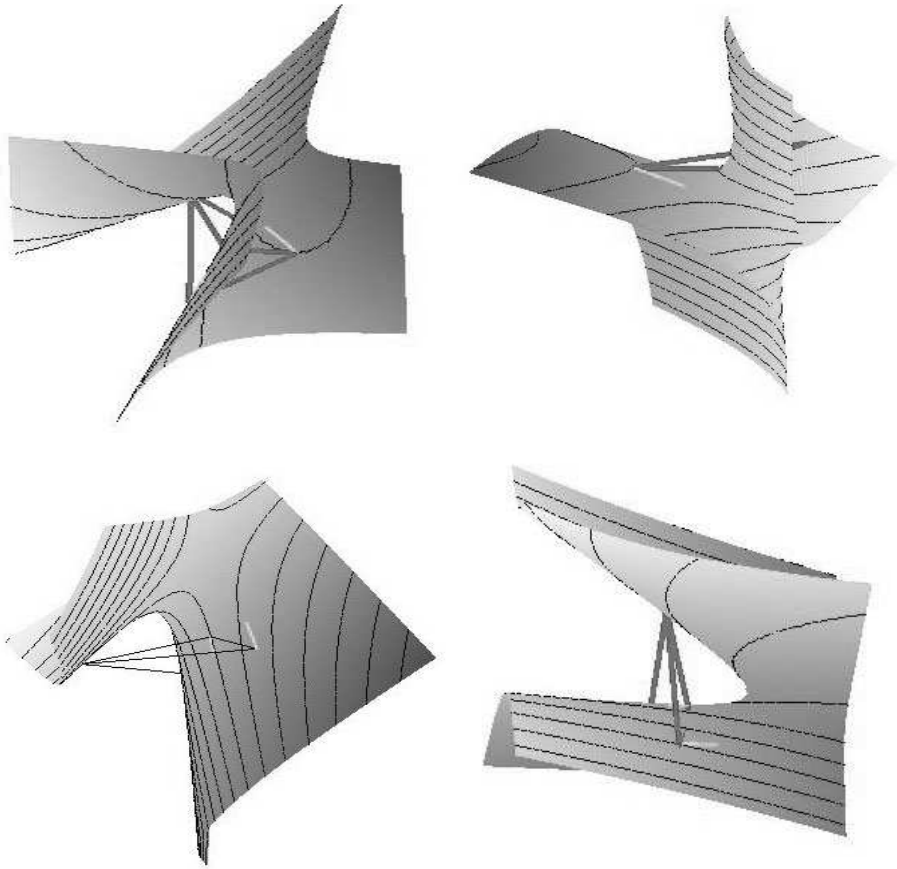
A végén nincs más dolgunk mint kirajzoltatjuk, lehetőleg egy koordináta rendszerbe a tetraédert, a magasságvonalait és a felületet. Ha a magasságok kitérők akkor, a Vályi-tétel alapján, egy szép egyköpenyű hiperboloidot kell kapjunk és a cián színű magasságok a görbült felületben vannak. Ez az általunk tesztelt adatokra szépen látható. Szemlélteti a geometria szépségét, a vonalfelületek egyik lényeges tulajdonságát! (Itt jegyzem meg, hogy ez a 4-dimenziós térben nem így van!)

Ha újra futtatni akarjuk a programunkat, akkor `restart` utasítást kell adni, és új értékekkel meghívni a `Kopeny` nevű eljárást. Bizonyos tesztadatokra bemutatjuk a generált rajzokat, hogy Maple nélkül is szemléltessük a hiperboloidok szépségét.



Tetraéder és magassága. Henger és elforgatása egyköpenyű hiperboloiddá.

De a hiperboloid modelljét szépen el lehet készíteni drótból is (és ez többet ér, mint a Maple-program). Vegyünk két azonos (egybevágó) vörösréz drótkarikát és forrasszunk rá alkotókat, úgy, hogy egy (küllős) henger oldalfelszínét kapjuk. Majd forgassuk el a két karikát ellentétes irányba. Az eredeti henger alkotói most átmennek a hiperboloid alkotóivá és ezek képezik a Vályi-féle tételben a tetraéder magasságait. Fordítva is eljárhatunk. Először készítünk vörös rézből egy tetraéder modellt, úgy hogy a csúcsoknál az éleket is és a kitérő magasságokat is összeforrasztjuk. Majd megkeressük azt a két ellipsziskarikát, amelyek ráilleszkednek párhuzamosan a kitérő magasságokra és további alkotókat forrasztunk, hogy az egyköpenyű hiperboloid jobban látszódjék. Aki egy ilyen modellt elkészít egy életre szóló barátságot köt az „egyköpenyű hiperboloiddal”.



A tetraéder magasságának burkoló egyköpenyű hiperboloidja

Könyvészet

1. Sándor Imre, Makfalvi és uzapaniti Dózsa család, *Genealógiai Füzetek*, 1903. április hó. 47-49 old.

2. Weszely Tibor, *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1983.

3. Marosvásárhelyi Állami Levéltár, Összeírási ívek, 1868. (Circumscripţii şi recensmânte, Registrele contemporane de evidenţă, Primăria Tg-Mureş)

4. Weszely Tibor, *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Könyvkiadó, 1983.

5. Marosvásárhelyi Állami Levéltár (Arhivele Statului, Filiala Mureş), Primăria Târgu-Mureş, Circumscripţii şi recensământe, anul 1857,1869,1896.

6. Oláh-Gál Róbert, Vályi Gyula szülőháza és az első Marosvásárhelyi Postahivatal, *Népújság*, 2004. július 6., kedd.

7. Vályi Gyula, A tetraéder magasságairól. *Math. és Phys. Lapok*, 12 (1894), 56-59. old.

Vályi Gyula számelméleti munkásságáról

Sándor József
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Kar
Email: jsandor@math.ubbcluj.ro

Bevezetés

Szénássy Barna megállapítás szerint Vályi Gyula tevékenységének egyik igen nagy érdeme az, hogy „minálunk – a több éven át tartott kollégiumai révén – az egyik eléggé elhanyagolt diszciplínának, a *számelméletnek* lelkes híveket toboroz." (lásd [11], [19]). És ez nem véletlen, hiszen sokoldalú érdeklődése, a vizsgált témakörök tanulmányozása természetszerűleg vezetett el a számelmélethez ([18]). Geometriai vizsgálataiban is vesz igénybe számelméleti módszereket (lásd [13], [14], [15]). Berlinben Kummer, Borchardt, Weierstrass és Kronecker tanítványaként megismerkedett az akkori matematika fontos irányvonalaival, és mint tudjuk – főleg Kummer, Weierstrass és Kronecker (de azért Borchardt is, aki algoritmusával mostanában reneszánszát éli) – az aritmetika és geometria, és a belőlük kifejlődő matematikai analízis fejlesztése révén – lényegesen új eredményekkel gazdagították a tudományt. Én különösen Vályi azon dolgozatait szeretném kiemelni, amelyekben geometriai köntösben számelméleti problémákat vizsgált. Ezzel a matematikában egy olyan terület egyik elindítójaként tarthatjuk számon, ahol napjainkig igen nagy az érdeklődés (lásd pl. „diophantoszi geometria") és számos megoldatlan probléma tartja lázban a kutatókat. Megemlítek néhány tisztán aritmetikai problémát is, amely rám nagy hatással volt.

Egyik kedvenc számelméleti problémája

Vályi egyik „kedvenc" számelméleti problémája volt (lásd [2]) meghatározni az összes olyan egész oldalú háromszöget, amelyeknek kerületét és területét ugyanaz a szám méri ([12]) (kis túlzással, kerületük és területük „egyenlő").

Utánanéztem ennek a dolgozatnak. 1891-ben jelent meg magyarul a *Mathematikai és Physikai Lapokban*, ahol lábjegyzetben a következőt írja: „Ezen különben ismeretes probléma teljes megoldása tudtunkkal ez ideáig még nincsen közzétéve". Vályi szerénységére vall, hogy más, fontosnak tartott cikkeitől eltérően – nem közölte ezt a cikkét németül. Ennek tudható be az is, hogy a fenti probléma első megoldójaként a híres Dickson-könyv [1] Whitworth és Biddle-t tartja, akik 1904-ben kimutatták, hogy csupán öt ilyen háromszög van. Pedig Vályi ezt hat évvel előttük már bebizonyította. Vályinak igaza van, amikor „ismeretes, de még megoldatlan" problémáról beszél, hiszen például B. Yates 1865-ben tanulmányozta a kérdést, és három partikuláris megoldást talált. 1887-ben C. de Comberousse meghatározza az összes ilyen derékszögű

háromszögeket (kettő van csupán ilyen, mégpedig (5,12,13) és (6,8,10) oldalhosszúságú háromszögek. Ezt a tényt I. Trifon román középiskolai tanár újra felfedezte 1978-ban, lásd pl. [6]).

Egy másik fontos cikkében [13] (melyet Dickson is idéz), tanulmányozta azoknak az n oldalú perspektív sokszögeknek a számát, melyek egy harmadrendű görbébe vannak beírva. A kiszámításban, Euler φ függvénye („totiense") mellett alkalmazta C. Jordan számelméleti függvényét is. Ezt $J_2(n) = n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ (p prím) képlettel értelmezhetjük (neki erre volt szüksége, amely nyilván $J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$ sajátos esete, ahol $k \geq 2$). Jordan ezt a függvényét csupán 20 évvel korábban vezette be a „Traité des substitutions, Paris, 1870" híres könyvében. Vályi Gyula tehát az elsők között tartható számon a Jordan-függvény más területeken történő alkalmazói közt (más alkalmazásokról lásd a szerző nemrég megjelent [7] munkáját).

1903-ban Vályi, egyik nagy hatású dolgozatában ([14], [15]) azt vizsgálta meg, hogy hány olyan háromszög van, mely az n-edik talpponti háromszöggel hasonló, de nem hasonló a d-edikkel, ahol $d < n$. Legyen $\psi(k) = 2^k(2^k - 1)$. Ekkor a fenti számot a $v(n) = \psi(n) - \sum \psi\left(\frac{1}{p_1}\right) + \sum \psi\left(\frac{1}{p_1 p_2}\right) - \dots$ képlet adja meg, ahol $p_1, p_2, \dots$ az n különböző prímfaktorai. A v függvényt a továbbiakban *Vályi számelméleti függvényének* fogjuk nevezni. Általánosítását lásd később.

Vályi Gyula sorozata

Még szeretnék két, tisztán aritmetikai, cikkéről is beszélni. Az „Egy számelméleti tantétel" c. írásában [16] a megszokott kongruencia jelölés mellett, azaz $a \equiv b \pmod{m}$, ahol a, b, m egész számok, bevezeti az $\frac{a}{b} \equiv x \pmod{p}$ törtkongruenciát is, és a szokatlan $\frac{a}{b} = \infty \pmod{p}$ jelölést. Az előbbi azt az egész x számot jelöli, melyre $bx \equiv a \pmod{p}$, míg az utóbbi pedig azt, hogy $a \not\equiv 0$, $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Az ilyen jelölések csak később, a p-adikus aritmetika (lásd pl. Hensel, Pisot stb.) bevezetése után terjedtek el.

Ugyancsak ebben a cikkében Vályi tanulmányozta egy rekurrens sorozat érdekes tulajdonságait. Legyen (F_n) így értelmezve: $F_0 = 1$, $F_1 = a$ (ahol a adott természetes szám), és $F_{n+1} = aF_n - aF_{n-1}$ ($n \geq 1$). A továbbiakban ezt a sorozatot *Vályi Gyula sorozatának* fogjuk nevezni. Vályi kimutatta, hogy ha p egy tetszőleges prímszám, ahol $p \nmid a$ (azaz p nem osztja a-t), akkor $p|F_{p-1}$ akkor és csakis akkor, ha $a \equiv 4 \pmod{p}$.

Végül a „Számelméleti apróságok" c. cikkében [17] (amely, szerintünk, számelméleti „ritkaságokat" tartalmaz) a tízes alapú számrendszerben érvényes $12 = 3 \cdot 4$, $56 = 7 \cdot 8$-ból kiindulva, azt vizsgálja, hogy más számrendszerben

lehetséges-e hasonló összefüggés négy egymás utáni számjegy közt. Ez nem lehetséges, de már a $24 = 4 \cdot 6$, $35 = 5 \cdot 7$-hez hasonló tulajdonság pl. a 12-es számrendszerbeli $13 = 3 \cdot 5$, $68 = 8 \cdot 10$ egyenlőségek.

Vályi Gyula hatása

A továbbiakban szeretnék beszélni a fenti témakörök rám gyakorolt hatásáról. 1986-ban (miután elolvastam Weszely Tibor [19] könyvét) a következő általánosítását vetettem fel a Vályi-féle háromszög-problémának. *Melyek azok az egész oldalú négyszögek, amelyeknek kerületét és területét ugyanaz a szám méri?* Erre a kérdésre ma sem tudom a választ, de sikerült megoldani a körbeírható négyszögek esetét (Erről feladatot és cikket is közöltem Berger Györggyel közösen [4], [5]). A probléma tárgyalása lényegében az $(x+y+z+t)^2 = xyzt$ diophantoszi egyenlet megoldására redukálódik. Eltérően azonban a háromszög esetétől, ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van! Ugyanis, ha (x, y, z, t) egy megoldás, akkor $(x, y, xyt - 2(x + y + t) - z, t)$; $(x, xzt - 2(x + z + t) - y, z, t)$; $(yzt - 2(y + z + t) - x, y, z, t)$ is megoldás, tehát lépésről lépésre a $(4, 4, 4, 4)$ triviális megoldásból a $(4, 4, 4, 36)$, $(4, 4, 484, 36)$, ... megoldások is nyerhetők. Ilyen jellegű egyenleteket Markov és Hurwitz vizsgáltak a 20. század elején (bár magát az egyenletet nem, ezt A. Schinzel neves számelmélész közölte velem). Hurwitz módszerével meghatározhatók az összes megoldások, ha ismertek a „fundamentális megoldások", azaz amelyekre $x \leq y \leq z \leq t$ és $x+y+z \geq t$. Ezen fundamentális megoldások megtalálásához számítógéprogramra is szükség volt (lásd [5], [6]).

Egy másik általánosítása a Vályi-féle háromszög-problémának a következő ([8]):

1) Melyek azok a háromszögek, amelyeknek kerülete osztja a területüket?

2) Melyek azok a háromszögek, amelyeknek területe osztja a kerületüket?

Az 1) kérdéskör „*terület*$= k\cdot$ *kerület*" alakban is felírható, ahol $k \geq 1$ egész (és nyilván oldalak és terület egész számok). Kimutattam, hogy végtelen sok ilyen háromszög van, és minden k-ra van megoldás. A sajátos esetek vizsgálata meglehetősen aprólékos munkát igényel. Például a $k = 2$ esetben összesen 14 megoldást találtam.

A 2) kérdéskör meglepetést is szolgáltat, mivel a „*kerület*$= k\cdot$ *terület*" $k \geq 2$-re csupán $k = 2$ esetben oldható meg, mégpedig a $(3, 4, 5)$ „ősi" pitágoraszi-háromszög által. Tehát, ebben az esetben csupán 6 megoldás van.

Érdekes, és meglehetősen nehéz, problémákhoz jutunk, ha megpróbáljuk általánosítani a Vályi-féle háromszögproblémát térbeli testekre [8]. Könnyű belátni, hogy három olyan egész alapsugarú, illetve magasságú henger van, amelyeknek térfogatát és és teljes felszínét ugyanaz a szám méri, mégpedig: $R = 3$, $m = 6$; $R = 6$, $m = 3$; $R = m = 4$; ($R =$ alapsugár, $m =$ magasság).

Legyenek most R, m, G egy egyenes forgáskúp alapsugara, magassága, illetve alkotója. Ha R, m, G egész számok és *térfogat* = *teljes felszín*, kimu-

tatható (nem éppen azonnali úton), hogy egyetlen megoldás $R = 6$, $m = 8$; $G = 10$.

Egy csonka kúp esetén a probléma jóval nehezebb, és egy megoldás $R = 9$, $r = 1$, $m = 6$; $G = 10$. Az összes általános megoldást azonban nem ismerjük.

A szögletes testek közül a legkézenfekvőbb a téglatest esete. Ha élei x, y, z (egész számok), akkor eljutunk az $xyz = 2(xy+xz+yz)$ egyenlethez. Bevezetve a $z = a$ paramétert, az egyenletet még $\big[(a-z)x - 2a\big] \cdot \big[(a-2)y - 2a\big] = 4a^2$ alakban is írhatjuk. Most, ha $d|4a^2$ egy tetszőleges osztója $4a^2$-nek, akkor $(a-2)x-2a = d$, $(a-2)y-2a = \dfrac{4a^2}{d}$, innen pedig $x = \dfrac{2a+d}{a-2}$, $y = \dfrac{2a+4a^2/d}{a-2}$. Mivel $\dfrac{2a+d}{a-2} = 2+\dfrac{d+4}{a-2}$, mondhatjuk, hogy a tekintett diophantoszi egyenlet csak abkor oldható meg, ha létezik $d|4a^2$ osztó, ahol $(a-2)|(d+4)$. Kimutatható, hogy $3 \le a \le 10$-re ez mindig teljesül, de $a = 11$-re nem!

A Vályi-probléma tetraéderre történő általánosítása még sajátos (pl. derékszögű) tetraéderek esetén is jelenleg megközelíthetetlennek tűnik.

Most áttérek Vályi számelméleti függvényére, illetve sorozatára. Legyen μ a Möbius-féle számelméleti függvény: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, ahol $n = p_1p_2\dots p_k$ (p_i különböző prímek), $\mu(n) = 0$, máskor. Vályi általánosított függvényét a következőképpen értelmezzük ([9]):

$$v(a,b;n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(a^d - b^d\right).$$

Általában, ha $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ egy számelméleti függvény, legyen

$$v_f(a,b;n) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)\left(a^d - b^d\right).$$

Ha $a = 2, b = 4$, megkapjuk Vályi függvényét $f = \mu$-re. A következő általános eredmény Gegenbauer egy tételén alapszik: Ha n osztja $\sum_{d|n} f(d)$-t, akkor n osztja $v_f(a,b;n)$-et bármely $a > b$ természetes számokra. Az $a = 2$, $b = 4$, $f = \mu$ esetben Vályi egy eredményét nyerjük vissza. Megjegyezzük, hogy Vályi számelméleti függvénye azért is érdekes, mert $v_f(a,b;n) = F_f(a,n) - F_f(b,n)$, ahol $F_f(a,n) = \sum_{d|n} f(d)a^{n/d}$, amelyet $f(d)\mu(d)$ esetén nagyon sokan vizsgáltak (és kapcsolatban van pl. a ciklotomikus – vagy körosztási – polinomokkal).

Vályi általánosított sorozatát $F_0 = 1$, $F_1 = a$, $F_{n+1} = aF_n + bF_{n-1}$ $(n \ge 1)$ képletekkel értelmezzük. Legyen

$$M_{a,b}(p) = \sum_{k=0}^{(p-1)/2} C^k_{\frac{p-1}{2}} 4^k a^{\frac{p-1}{2}-2k} b^k,$$

ahol p egy páratlan prím. A következő eredményt bizonyítottam: Ha $p \nmid a$, akkor $p|F_{p-1} \iff p|M_{a,b}(p)$. Sajátosan, ha $b = \lambda a$ (ahol $\lambda \in \mathbb{Z}$), a feltétel

leegyszerűsödik: $p|F_{p-1} \iff a \equiv -4\lambda \pmod p$. Ez az eset azért is érdekes, mert *közös* általánosítását adja a Fibonacci és Vályi sorozatának ($a = 1, \lambda = 1$ — Fibonacci; $a =$ tetszőleges, $\lambda = -1$ — Vályi). Így a Fibonacci-sorozatra azt találjuk, hogy $p|F_{p-1} \iff p = 5$.

Végül, Vályi „számelméleti apróságai" arra ösztökéltek, hogy megvizsgáljam többjegyű számok esetén is a kérdéskört, illetve, hogy analóg problémákat vessek föl ([10]). Például, a 10-es számrendszerben érvényesek: $1122 = 33 \cdot 34$; $4422 = 66 \cdot 67$; $5256 = 72 \cdot 73$; $6162 = 78 \cdot 79$; $3135 = 55 \cdot 57$. Az általánosítások nemegyszer nehéz problémákhoz vezetnek el. Például a $6162 = 78 \cdot 79$-nek az alábbi általánosítását mutattam ki: $\overline{a1a2} = \overline{(a+1)(a+2)} \cdot \overline{(a+1)(a+3)}$ az x alapú számrendszerben, ha $(x, a+1) = 1$ csak akkor oldható meg, ha $x = 10$ és $a = 6$.

Az $\overline{a\ a+2\ a+4}_b = (a+4)(a+6)(a+8)$ (b =számrendszer alapja) és $\overline{a\ a+1\ a+2}_b = (a+3)(a+4)(a+5) + a + 6$ egyenleteket Kiss Elemérrel közösen vizsgáltuk meg. Például, ez utóbbi csak akkor oldható meg, ha $a = 3$, $b = 10$, és így nyerjük a $345 = 6 \cdot 7 \cdot 8 + 9$ azonosságot, amelyhez hasonló sem a tízes, sem más számrendszerben nem érvényes.

A $12 = 2^3 + 4$ észrevétel elvezet az $\overline{a\ a+1}_b = (a+1)^{a+2} + a + 3$ egyenlethez. Kimutatható, hogy csupán $a = 1$, $b = 10$ és $a = 3$, $b = 342$ lehetnek megoldások.

Az analóg $\overline{a\ a+1}_b = (a+2)^{a+3} + a + 4$ probléma azonban meglepő dolgokhoz vezet el. Ennek nyilván $a = 1$, $b = 84$ megoldása lesz. Fermat tételével kimutatható, hogy a prímszámok közül csupán $a = 19$ lehet megoldás, amikor is $b = (21^{22} + 3)/19$. A következő (nyitott) kérdés tehető fel: vannak-e más megoldások? Más szavakkal, az $a|\left(2^{a+3}+3\right)$ relációnak vannak-e $a = 1$, $a = 19$-en kívül más megoldásai is?

Vályi „apróságainak" számos más analogonja van. Például, melyek az $\overline{a\ a+1}_b = \overline{a+1\ a+2}_c$ összes megoldásai? Hasonló az $\overline{a\ a+1}_b + \overline{a+1\ a+2}_c = \overline{a+2\ a+3}_d + \overline{a+3\ a+4}_e$. Kimutatható, hogy végtelen sok megoldás van, és az általános alakjuk meghatározható.

Hasonló egyenlet az

$$\frac{\overline{ab}_x}{\overline{cd}_y} = \frac{\overline{ef}_x}{\overline{gh}_y},$$

ahol a, b, c, d, e, f, g, h bizonyos számjegyek az x, y alapú számrendszerekben. Ezek nem minden esetben oldhatók meg. Például, megemlítjük az érdekes

$$\frac{\overline{a\ a+1}_x}{\overline{a+1\ a+2}_y} < \frac{\overline{a+2\ a+3}_x}{\overline{a+3\ a+4}_y}$$

egyenlőtlenséget, amely mindig érvényes.

Nehezebb problémákhoz vezetnek, ha legalább háromjegyű számokat tekintünk. Az általános $\overline{abc}_x = \overline{def}_y$ egyenlet megvizsgálható: egyszerűség kedvéért tekintsük csupán az $\overline{a+1\ 0\ a+2}_x = \overline{a\ 0\ a+3}_y$ egyenletet! Ez még

$(a+1)x^2 - ay^2 = 1$ alakban is írható. Most az $AX^2 - BY^2 = C$ általános Pell-egyenlet elmélete szerint $X = s_0u + Bt_0v$, $Y = t_0u + As_0v$, ahol $u^2 - ABv^2 = C$ és (s_0, t_0) az $As^2 - Bt^2 = 1$ egyenlet legkisebb megoldása. Esetünkben $A = a+1$, $B = a$, $s_{=}t_0 = 1$, $C = 1$, úgyhogy $X = u + av$, $Y = u + (a+1)v$, ahol $u^2 - a(a+1)v^2 = 1$. Mivel $D = a(a+1)$ nem teljes négyzet, jól ismert, hogy ez utóbbi egyenlet megoldható és, ha (u_0, v_0) a legkisebb megoldása, akkor $u_n + v_n\sqrt{D} = (u_0 + v_0\sqrt{D})^n$ $(n \geq 0)$ rekurenciából megkaphatók az általános megoldások: $x = u_n + av_n$, $y = u_n + (a+1)v_n$, ahol $n \geq 1$ (hiszen ekkor $v_n \geq 2$ és tehát $x > a+2$, $y > a+3$).

Nyitott problémák

Most szeretnék néhány fejleményről, illetve nyitott problémáról beszélni.

Azokat a háromszögeket, amelyeknek oldalai egészek, és területek is egész, *Héron-háromszögeknek* nevezzük. Tehát a Vályi-féle háromszögprobléma azon Héron-háromszögeket tárgyalja, amelyeknek területe egyenlő a kerületükkel. Ma már a Héron-háromszögeknek nagy irodalmuk van. Vizsgálhatjuk például, hogy egy Héron-háromszögben magasságok, szögfelezők stb. mikor egészek (lásd pl.[6]). Az alábbi probléma, habár már tulajdonképpen Euler idejéből származik, máig is megoldatlan (lásd pl. R. K. Guy [3]): *Van-e olyan Héron-háromszög, amelynek minden oldalfelezője egész szám?*

Hasonló problémakör adódik, ha különféle Héron-tetraédereket, vagy más testeket tekintünk (egy párat saját problémáinkból is említettünk – például. a Vályi-probléma analogonját csonka kúp esetére). Az alábbi probléma is nagyon régi:

Van-e olyan egész oldalú téglatest, amelynek minden lapátlója és testátlója is egész? (Tehát, más szavakkal, megoldató-e az $x^2 + y^2 = t^2$, $y^2 + z^2 = u^2$, $x^2 + z^2 = v^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ rendszer az egész számokban?)

A következő problémát H. Steinhaus vetette fel: *Van-e olyan pont a síkban, melynek távolságai az egységnégyzet oldalaitól mind racionális számok?*

Az alábbi nyitott kérdést most én teszem fel: *Melyek azok az egész oldalú háromszögek, melyeknél a beírt kör sugara osztja a körülírt kör sugarát?*

Könyvészet

1. L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, I, Chelsea, 1919.

2. J.J.O'Connor, E.F.Robertson, `http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk`

3. R.K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Third edition, 2004. Springer Verlag.

4. J. Sándor, Gy. Berger, Aufgabe 1025, *Elem. Math.*, **45** (1990), 28.

5. J. Sándor, Gy. Berger, Számelméleti probléma a geometriában, *Mat. Lapok*, Kolozsvár, 2 (1994) 44–46.

6. J. Sándor, *Geometric theorems, diophantine, equations and arithmetic functions*, American research Press, Rehoboth, New Mexico, 2002.

7. J. Sándor, *Handbook of number theory II.*,Springer Verlag, 2004.

8. J. Sándor, On certain extensions of some number theoretical problems of Gy. Vályi, submitted.

9. J. Sándor, On certain arithmetis functions, and a sequence studied by Gy. Vályi, submitted.

10. J. Sándor, Arithmetical recreations – easy and difficult problems suggested by the work of Gy. Vályi, in preparation.

11. B. Szénássy, *A magyarországi matematika története*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

12. Gy. Vályi, Számelméleti probléma a geometriában, *Math. és Phys. Lapok*, 1 (1891) 56–57.

13. Gy. Vályi, A harmadrendű görbe vonalak elméletéhez (II), *Math. és Term. Tud. Ért.*, 9 (1890) 15–25.

14. Gy. Vályi, A talpponti háromszögekről, *Math. és Phys. Lapok*, 10 (1901) 309–321.

15. Gy. Vályi, Über die Fusspunktdreiecke, *Monaths. für Math. und Phys.*, 14 (1903) 243–252.

16. Gy. Vályi, Egy számelméleti tantétel, *Math. és Phys. Lapok*,16 (1907) 273–276.

17. Gy. Vályi, Számelméleti apróságok, *Math. és Phys. Lapok*, 21 (1912) 296–297.

18. Gy. Vályi, *Számelmélet*, Kolozsvár, 1898.

19. T. Weszely, *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Kiadó, Bukarest, 1983.

Változatok egy Bolyai-témára

Kiss Elemér
Sapientia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar, Marosvásárhely
Email: elemer@ms.sapientia.ro

Sándor József
BBTE Kolozsvár, Matematikai és Informatikai Kar
Email: jjsandor@hotmail.com

Bevezetés

Bolyai János (1802–1860) kéziratos hagyatékában ([3], 1265/33, 33^{v}) található egyik szép számelméleti tétele: ha p és q prímszámok, a pedig egy olyan egész szám, amely nem osztható sem p-vel, sem q-val, akkor

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}. \tag{1}$$

Ezt a tételt J. H. Jeans publikálta először Bolyai halála után 38 évvel [4]. Bolyai János ehhez a tételhez abban az igyekezetében jutott, hogy megcáfolja a kis Fermat-tétel — ha p prímszám, a egy olyan egész szám, hogy $(a, p) = 1$, akkor

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{2}$$

— fordítottját. Ellenpéldát keresett s az (1) segítségével $p = 11, q = 31$ és $a = 2$-re megkapta a $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ kongruenciát. Az olyan összetett p számokat, amelyekre (2) igaz „pszeudoprímeknek" nevezzük (az a alapra nézve). Bolyai a 341 mellett más pszeudoprímszámokat is talált [6, 84 old.].

A Bolyai-téma

Ha az (1) összefüggésbe $q = p$-t helyettesítünk az

$$a^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{3}$$

új kongruenciához jutunk. Ez a kongruencia nem található ebben a formában a kéziratokban, de $a = 5$ és $p = 2$-t helyettesítve, Bolyai felírta az $5^3 \equiv 1 \pmod 4$ kongruenciát ([3], 1193/20^{v}). Tudomásunk szerint a (3) kongruencia, ebben az általános formában, még nem ismert a matematikatörténetben, bár ennek egy sajátos alakja, $a = 2$-re már előfordult D.H. Lehmer ([7], 312 old.) dolgozatában, anélkül azonban, hogy a szerző ezt részletesen vizsgálta volna. Észrevesszük, hogy (3) nem minden a és p-re igaz. Például $a = 5$ és $p = 3$-ra $5^8 \not\equiv 1 \pmod 9$. Ezért feladatul tűzzük ki az összes olyan (a, p) számpárok meghatározását, amelyekre (3) teljesül. Ezek a tételek lesznek a „változatok" a (3) témára.

Elemi úton igazolhatóak az alábbi tételek:

1. tétel. *Ha* $p = 2$, *(3) pontosan akkor teljesül, ha*

$$a \equiv 1 \pmod 4.$$

2. tétel. *Ha* $p = 3$, *(3) pontosan akkor teljesül, ha*

$$a \equiv \pm 1 \pmod 9.$$

3. tétel. *Ha* $p = 5$, *(3) pontosan akkor teljesül, ha*

$$a \equiv \pm 1 \pmod{25} \quad \textit{vagy} \quad a \equiv \pm 7 \pmod{25}.$$

4. tétel. *Ha* $p = 7$, *(3) pontosan akkor teljesül, ha*

$$a \equiv \pm 1 \pmod{49} \quad \textit{vagy} \quad a \equiv \pm 18 \pmod{49}.$$

Az általános eset a következő:

5. tétel.

$$a^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{4}$$

Bizonyítás. Legyen $a^{p-1} = x$. Akkor

$$a^{p^2-1} - 1 = x^{p+1} - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^p). \tag{$*$}$$

A $(*)$ azonosság alapján, ha $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, akkor nyilván $a^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, azaz a tétel egyik részét igazoltuk.

Fordítva, ha a bal oldali kongruencia, vagyis (3) teljesül, akkor a nem lehet osztható p-vel, vagyis $(a, p) = 1$. A kis Fermat-tétel, azaz (2) alapján ekkor $p \mid x - 1$.

Most megmutatjuk, hogy p nem osztja $(*)$ jobb oldalának második tényezőjét, azaz

$$p \quad \text{nem osztja} \quad (1 + x + \cdots + x^p). \tag{5}$$

Valóban, mivel

$$1 + x + \cdots + x^p = (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^p-1) + (p+1)$$

és $x-1, x^2-1, \ldots, x^p-1$ tagok mind oszthatóak p-vel — éppen (2) alapján — , de $p+1$ nyilván nem osztható p-vel, (5) bizonyítva van, tehát ha (3) igaz, akkor (5) alapján $x-1$ osztható kell legyen nemcsak p-vel, hanem p^2-tel is. ■

A következő tételek az 5. tétel általánosításai.

6. tétel. *Legyen $k \geq 2$ egy rögzített egész szám. Akkor*

$$a^{p^k-1} \equiv 1 \pmod{p^k} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás az $a^{p^k-1} = x^{m+1} - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^m)$ azonosságon alapszik, ahol $x = a^{p-1}$, mint fent és $m = p + p^2 + \cdots + p^{k-1}$. ■

7. tétel.

$$a^{p^k-1} \equiv 1 \pmod{p^k} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad a^{p^{k-1}-1} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Bizonyítás. Először észrevesszük, hogy ha egyik a fenti kongruenciák közül teljesül, akkor $(a, p) = 1$. Most, ha Euler tételét — $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ — $n = p^k$-ra alkalmazzuk, kapjuk, hogy

$$a^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Mivel

$$a^{p^k-1} = a^{p^k-p^{k-1}} \cdot a^{p^{k-1}-1} = (1 + Mp^k) \cdot a^{p^{k-1}-1}$$

($M \geq 1$, egész) következik, hogy

$$a^{p^k-1} - 1 = a^{p^{k-1}-1} - 1 + M'p^k \quad (M' \geq 1, \text{egész}),$$

amely azonosságból azonnal adódik az eredmény. ■

$k = 2$-re a 7. tételből az 5. tételt kapjuk.

A 7. tételhez hasonló módon bizonyíthatjuk a következő tételt:

8. tétel. *Legyen $n > 1$ egy tetszőleges egész szám, és legyen p^k a p prímszám legnagyobb olyan hatványa, amely osztja n-t. Ha $N = \frac{n}{p^k}$, akkor*

$$a^m \equiv 1 \pmod{n} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad a^s \equiv 1 \pmod{n},$$

ahol

$$m = p^k\varphi(N) \quad \textit{és} \quad s = p^{k-1}\varphi(N) \quad (\varphi(N) \quad \textit{az Euler-féle függvény).}$$

$n = p^k$-ra, visszakapjuk a 7. tételt.

Megjegyezzük, hogy ha az Euler tételnek R.T. Hansen által adott általánosítását [9], vagyis

$$a^{\varphi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$$

ahol $(a, n) = d$, és $\left(a, \frac{n}{d}\right) = 1$ alkalmazzuk, akkor némileg még általánosíthatjuk a 8. tételt a következőképpen (a jelölések az előbbiek):

9. tétel. *Legyen* $(a,n)=d$ *és tételezzük fel, hogy* $\left(a,\frac{n}{d}\right)=1$. *Akkor*

$$a^u \equiv a \pmod{n} \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad a^v \equiv a \pmod{n},$$

ahol

$$u = p^k\varphi(N)+1 \quad \textit{és} \quad v = p^{k-1}\varphi(N)+1.$$

Ha $d=1$, *azaz* $(a,n)=1$, *kapjuk a 8. tételt.*

Megjegyzések

1. Az 5. tétel alapján új bizonyításokat adhatunk az 1-4. tételekre.

2. A matematikatörténet Abelnek tulajdonítja azt a kérdést, hogy milyen példák találhatóak az

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \tag{6}$$

kongruenciára (1828). $p \le 37$-re Jacobi találta meg a következő példákat:

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{11^2}, \qquad 9^{10} \equiv 1 \pmod{11^2},$$
$$14^{28} \equiv 1 \pmod{29^2}, \qquad 18^{36} \equiv 1 \pmod{37^2}.$$

Érdekes, hogy nem figyelt fel az egyszerűbb

$$10^2 \equiv 1 \pmod{3^2}$$

összefüggésre.

Az $a=2$-re (6) alakja

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}. \tag{7}$$

Ezt a kongruenciát kielégítő prímeket Wieferich-prímeknek nevezzük. Ő volt az, aki 1909-ben kapcsolatot talált a nagy Fermat-tétel és a (7) kongruencia között. A $p=1093$ és $p=3511$ kielégítik (7)-et [5], de az ilyen prímek halmaza nagyon ritkának tűnik. A fenti példákat Meissner és Beeger találták 1913-ban, illetve 1922-ben. 1985-ben Crandall, Dilcher és Pomerance kimutatták, hogy csupán ez a két Wieferich-prím létezik $p < 4\cdot 10^{12}$ alatt. Mégis jelenleg az a sejtés, hogy (7)-nek és általában (6)-nak (bármely $a \ge 2$ rögzített számra) végtelen sok megoldása van. Ez nagyon nehezen megoldható sejtésnek tűnik [8], [9].

A $q_p(a) = \dfrac{a^{p-1}-1}{p}$ arányt nevezik még Fermat arányának (az a alapon) is. Ezeknek az arányoknak számos nevezetes tulajdonsága ismert. Például, ha p nem osztja ab-t, akkor

$$q_p(ab) \equiv q_p(a)+q_p(b) \pmod{p}.$$

Más tulajdonságok: $q_p(p-1) \equiv 1 \pmod{p}$, $q_p(p+1) \equiv -1 \pmod{p}$, stb. A Fermat-arány („Fermat's quotient") néhány új tulajdonságát a [1], [2] és [9]-ben találjuk.

Könyvészet

1. Agoh, T., On Fermat and Wilson quotients, *Exp. Math.* **14** (1996), pp. 145-170.

2. Agoh, T., Dilcher, K. and Skula, L., Fermat's quotients for composite moduli, *J. Number Theory*, **66** (1997), nr.1, pp. 29-50.

3. Bolyai János kéziratos hagyatéka, Marosvásárhely, Teleki-Bolyai Könyvtár.

4. Jeans, J.H., The Converse of Fermat's Theorem, *Messenger of Mathematics*, **27** (1897-1898), pp. 174.

5. Hausner, M., Sachs, D., On the congruence $2^p \equiv 2 \pmod{p^2}$, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), pp. 996.

6. Kiss, E., Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából, *Akadémiai Kiadó, Tipotex Kft.*, Budapest, 1999.

7. Lehmer, D. H., On the Converse of Fermat's Theorem, *Amer. Math. Monthly*, **43** (1936), pp. 347-354.

8. Ribenboim, P., *The new book of prime number records*, Springer-Verlag, 1996.

9. Sándor, J., *Handbook of number theory II*, (in coop. with. B. Cristici), *Springer - Verlag*, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

A dolgozat egy angol nyelvű változata a közelmúltban jelent meg *On a Congruence by János Bolyai, Connected with Pseudoprimes* címen, Mathematica Pannonica, **15** (2004), nr.2, pp. 283-288.

Schinzel egy prímszámokra vonatkozó sejtésének a vizsgálata*

Bege Antal
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Kar
Email: bege@math.ubbcluj.ro

Fülöp Péter-István
Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhely
Műszaki és Humántudományok Kar
Email: fpeter@ms.sapientia.ro

Bevezetés

Schinzel 1958-ban [7] megfogalmazta a következő sejtést:
Minden pozitív egész n felírható a következő alakban:

$$n = \frac{p+1}{q+1} \tag{1}$$

ahol p és q prímszámok.

C. Badea [1] olyan (1) alakú felírásokat vizsgálta amelyekben a q prímszám de a p-nek legalább 3 prímosztója van, míg P. D. T. A. Elliott [3],[4] az (1) egyenlet megoldásainak a számát vizsgálta adott n-re. Később, 2001-ben M. M. Conroy [2] ellenőrizte a sejtést $n \leq 10^9$-re. Bevezette a $q(n)$ függvényt, ami azt a legkisebb q prímszámot jelenti, amelyre n felírható (1) alakban, továbbá numerikus eredményeket közölt a $q(n)$ függvényre vonatkozóan. A következőkben a prímszámok halmazát $\mathbb{P}$-vel jelöljük. A következő alapvető eredményeket fogjuk használni bizonyításaink során.

1. lemma (Dirichlet-tétel [5], p. 13, 15. tétel). *Ha a pozitív egész, valamint a és b relatív prímek, akkor végtelen sok*

$$an + b$$

alakú prím létezik, ahol n természetes szám.

2. lemma (Prímszámtétel, [5], p. 9, 7. tétel). *Az x-nél kisebb prímek számára, $\pi(x)$-re, igaz a következő összefüggés:*

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \frac{x}{\log x},$$

vagy

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

*A kutatást részben a Sapientia Alapítvány támogatta.

A következőben, olyan eredményeket mutatunk be, amelyek végtelen sok (1)-es alakban felírható n létezésével kapcsolatosak, rögzített q vagy p mellett, valamint a $\dfrac{p+1}{q+1}$ sorozat sűrűségét vizsgálják.

Tárgyalás

1. tétel. *Ha $q \in \mathbb{P}$ egy rögzített prím, akkor végtelen sok n természetes szám létezik, amely felírható*

$$n = \frac{p+1}{q+1}.$$

alakban.

Bizonyítás. Tekintsük a következő függvényt:

$$f_q(n) = n(q+1) - 1.$$

Mivel $q+1$ és -1 relatív prímek Dirichlet tétele (1. lemma) alapján, következik, hogy a $(f_q(n))_{n\geq 1}$ sorozatnak végtelen sok prím eleme van. Jelöljük $(p_k)_{k\geq 1}$-gyel ezen prímek sorozatát. Ugyanakkor tudjuk, hogy minden p_k-ra létezik egy n_k oly módon, hogy

$$p_k = n_k(q+1) - 1$$

ami azt jelenti, hogy n_k felírható az

$$n_k = \frac{p_k+1}{q+1}.$$

alakban. ■

Megjegyzések.
1. Hasonló módon bízonyítható, hogy rögzített $q \in \mathbb{P}$ esetén végtelen sok olyan n létezik, amely felírható

$$n = \frac{p-1}{q-1}$$

alakban, ahol $p \in \mathbb{N}$.
2. Bízonyíthatjuk a következő általános eredményt.
Ha q egy rögzített prím, b és $q+1$ relatív prímek, akkor végtelen sok n létezik, amely felírható a következő alakban:

$$n = \frac{p+b}{q+1}.$$

3. Jelöljük $N(q,a)$-val azon n egészek halmazát, amelyekre létezik $p \in \mathbb{P}$, úgy hogy

$$n = \frac{p+a}{q+1},$$

azaz

$$N(q,a) = \left\{ n \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{P}, n = \frac{p+a}{q+1} \right\}$$

Megfogalmazhatjuk a következő megoldatlan problémákat:

1. feladat. *Ha $q \in \mathbb{P}$ rögzített, van-e az $N(q,1)$ és $N(q,3)$ halmazoknak végtelen sok közös eleme?*

Ez a probléma ekvivalens a ikerprímek problémájával, hiszen ha $n \in N(q,1) \cap N(q,3)$, akkor ebből következik, hogy

$$n = \frac{p_k+1}{q+1} = \frac{p_\ell+3}{q+1}$$

ami azt jelenti, hogy $p_k - p_\ell = 2$, azaz p_k és p_ℓ ikerprímek.

2. feladat. *Ha $q \in \mathbb{P}$, $q \neq 2$ rögzített, $b \neq c$ természetes számok, amelyek relatív prímek $q+1$-gyel , van-e az $N(q,b)$ és $N(q,c)$ halmazoknak végtelen közös eleme?*

A következő részben az

$$M = \left\{ \frac{p+1}{q+1} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{P} \right\}.$$

halmaz (R)-sűrűségével kapcsolatos eredményt mutatunk be.Tudott az, hogy az

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{P} \right\}.$$

halmaz sűrű $\mathbb{R}^+$-ben. (lásd [8], p. 155 valamint [6]).

2. tétel. *Az*

$$M = \left\{ \frac{p+1}{q+1} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{P} \right\}$$

halmaz sűrű $\mathbb{R}^+$-ben.

Bizonyítás. Tekintsünk a tetszőleges $0 < a < b$. A prímszámtétel (2. lemma) alapján minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan x_0 valós szám, hogy minden $x \geq x_0$-ra találunk legalább egy olyan p prímszámot, amelyre

$$ax < p < ax(1+\delta). \tag{2}$$

Tekintsük a $\delta = \dfrac{b-\epsilon-a}{a} > 0$ értékét megfelelően kicsi $\epsilon > 0$ mellett. A (2)-es összefüggés alapján

$$ax < p < x(b-\epsilon).$$

Választunk egy olyan $q \in \mathbb{P}$ prímszámot, amelyre $x = q + 1 - \dfrac{1}{a} > x_0$. Így

$$a(q+1) - 1 < p < b(q+1) - (\frac{b}{a} + \epsilon x).$$

Mivel

$$\frac{b}{a} + \epsilon x > 1$$

kapjuk, hogy

$$a < \frac{p+1}{q+1} < b,$$

azaz $\dfrac{p+1}{q+1}$ a és b között található. ■

Megjegyzések.
1. Hasonló módon bízonyítható, hogy az

$$M = \left\{ \frac{p-1}{q-1} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{P} \right\}$$

halmaz sűtű $\mathbb{R}^+$-ben.
2. Legyen $\varphi(n)$ az Euler-féle φ függvény és $\sigma(n)$ az ostók összege. A 2. tételből és az 1. megjegyzésből következik, hogy a

$$B_1 = \left\{ \frac{\varphi(n)}{\varphi(m)} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \frac{\sigma(n)}{\sigma(m)} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

halmazok sűrűk $\mathbb{R}^+$-ben.

Könyvészet

1. C. Badea, Note on a conjecture of P. D. T. A. Elliot, *Arch. Math. (Brno)*, **23** (1987), 89–94.

2. M. M. Conroy, A sequence related to a conjecture of Schinzel, *Journal of Int. Sequences,* **4** (2001), Article 01.1.7.

3. P. D. T. A. Elliott, A conjecture of Kátai, *Acta Arith.*, **26** (1974), 11–20.

4. P. D. T. A. Elliott, *Arithmetic funcions and integer products*, Springer-Verlag, 1985.

5. G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers,* Oxford University Press, New York, 1998.

6. D. Hobby, D. M. Silberger, Quotients of primes, *Amer. Math. Montly,* **100** (1993), 50–52.

7. A. Schinzel and W. Sierpinski, Sur certaines hypothéses concernant les nombres premiers, *Acta Arithmetica,* **4** (1958), 185–208.

8. W. Sierpinsky, *Elementary theory of numbers*, PWN, Warszawa, 1964.

Mátrixok Frobenius-alakjának egy jellemzése

Horváth Sándor
Sapientia EMTE, Marosvásárhely, Matematika és Informatika Tanszék
Email: shorvath@ms.sapientia.ro

A jelen dolgozat tárgyát olyan feltételeknek a vizsgálata képezi, amelyek teljesülése jellemzi – egész pontosan szükséges ahhoz, – hogy egy adott mátrixnak adott típusú kanonikus alakja legyen. Vizsgálatainkat előbb a Jordan-alakra, majd a Frobenius-alakra alkalmaztuk.

Az eredmények intenzív számítás-igényűek, ezért explicit eredményt csak kis dimenzió esetére adunk. A módszer azonban elvben tetszőleges dimenzióra érvényes.

Bevezetés

Legyen A egy négyzetes mátrix, amelynek elemeit a K testből vesszük. Ismeretes, hogy ha K a komplex számok teste, akkor létezik egy vele ekvivalens Jordan-alakú mátrix.

Ha azonban K a racionális vagy akár a valós számok teste, akkor a Jordan-cellák helyett a karakterisztikus polinom irreducibilis tényezőihez rendelt cellák és ezek egynél nagyobb multiplicitása esetén esetleg a speciális átló alatti egyetlen 1-est tartalmazó cellákból felépített Frobenius-alak játssza a kanonikus alak szerepét. A következő természetes kérdés fogalmazható meg:

Megadunk egy Frobenius- (vagy Jordan-) alakot, illetve szerkezetet. Hogyan jellemezhetők a priori, tehát a kanonikus alak kiszámítása nélkül azok a mátrixok, amelyeknek kanonikus alakja az adott szerkezetet mutatja? Más szóval, milyen feltételeknek kell eleget tenniük a mátrixelemeknek ahhoz, hogy a mátrix kanonikus alakja az adott szerkezetet adja.

1. probléma. *Konkrét alakban $n = 2$ és $n = 3$ esetén Frobenius-alakra tekintsük az alábbi tetszőleges mátrixokat:*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}.$$

Jellemezzük a mátrix-elemeket, ha tudjuk, hogy a Frobenius-alakok

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^3 \\ 1 & 0 & 3\lambda^2 \\ 0 & 1 & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

2. probléma. *Úgyszintén $n = 2$ és $n = 3$ esetén Jordan-alakra tekintsük az alábbi tetszőleges mátrixokat:*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}.$$

Jellemezzük a mátrix-elemeket, ha tudjuk, hogy a Jordan-alakok

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Megoldás Gröbner-bázisok segítségével

A Gröbner-bázisok elméletének felhasználásával érdekes eredmények kaphatók az ilyen mátrixok jellemzésére.

Az alapötletet az alábbi egyszerű észrevétel képezi.

- Kifejezzük az A mátrixot a kanonikus alakja segítségével.
- Kapunk egy polinomiális egyenletrendszert, amelynek változói az ismeretlen mátrixok elemei.
- Az elimináció elméletét alkalmazva, feltételrendszert kapunk az adott mátrix elemeire.

Mindezek a lépések ténylegesen végrehajthatók egy alkalmas számítógép-algebrai szoftver-csomag segítségével. Az általunk preferált számítógép-algebrai szoftver-csomag a *Singular*, amely ingyenesen letölthető az internetről és valószínűleg a leghatékonyabb ezen a területen. Megtalálható az `http://www.singular.uni-kl.de` internet címen.

Nézzünk néhány részletet vázlatosan.

1. definíció. *Legyen $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ egy ideál (amely nem 0).*

*(1) az I-beli **főtagok halmazát** így jelöljük*
$LT(I) = \{cx^\alpha : \text{ létezik } f \in I, \text{ ú.h. } LT(f) = cx^\alpha\}$,

*(2) a **főtagok ideálját** az $LT(I)$ elemei generálják, és jelölése $< LT(I) >$.*

Könnyen látható, hogy a főtagok ideálja úgynevezett monomiális ideál és végesen generált, mégpedig az I ideál véges számú polinomjának főtagjai által.

Ezzel meg is adhatjuk a Gröbner-bázis definícióját. Tekintsünk egy monomiális rendezést (a monomoknak olyan teljes és jól-rendezése, amely kompatibilis a monomok szorzásával). Legyen I egy ideál a $k[x_1, \ldots, x_n]$ többváltozós polinomok gyűrűjében.

2. definíció. *Az I-nek egy véges $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ részhalmazát az ideál* ***Gröbner-bázisának*** *nevezzük, ha*

$$< LT(g_1), \ldots, LT(g_s) >=< LT(I) > .$$

Számunkra legfontosabb tulajdonsága a Gröbner-bázisnak az, hogy algoritmus segítségével kiszámítható. Az algoritmus Buchberger nevét viseli. Ez megtalálható több általános célú számítógép-algebrai szoftvercsomag (Mathematica, Maple) újabb kiadásában, de talán a leghatékonyabb implementációt a *Singular* tartalmazza.

A Gröbner-bázisok egyik legfontosabb elméleti tulajdonsága az, hogy segítségével eldönthető az ideálhoz tartozás problémája. Ez az alábbi módon fogalmazható meg.

Legyenek $f, f_1, f_2, \ldots, f_k \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomok. Tegyük fel, hogy $I =< f_1, f_2, \ldots, f_k >$, és $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ Gröbner-bázisa I-nek.

Legyen továbbá

$$f = g_1 q_1 + g_2 q_2 + \cdots + g_s q_s + r$$

az általános osztás szerint f osztásának képlete a $g_1, \ldots, g_s$ polinomokkal. Akkor

$$f \in I \Leftrightarrow r = 0,$$

tehát az ideálhoz tartozás éppen a Gröbner-bázis segítségével egyértelműen eldönthető.

Adjunk jellemzést tehát mátrixok Frobenius-alakjára, egyelőre a 2×2-es mátrixok esetére.

1. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \text{ és } F = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Ha F az A mátrix Frobenius-alakja, akkor

$$(x - v)^2 + 4yz = 0.$$

Hasonlóan, ugyanezen mátrixok Jordan-alakja a következőképpen jellemezhető.

2. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \text{ és } D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ha D az A mátrix Jordan-alakja, akkor

$$(x - v)^2 + 4yz = 0.$$

Ugyanezt a jellemzést három dimenzióban pedig a következőképpen jelenthetjük ki:

3. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ és } F = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ha F az A mátrix Frobenius-alakja, akkor

$$\begin{array}{lcl} 3yu - 2xv + sv + vw & = & 0 \\ xu - 2su + 3rv + uw & = & 0 \\ xs + s^2 + 3zu + 6tv - xw - 3sw + 2w^2 & = & 0 \\ 3zr - 2xt + st + tw & = & 0 \\ 3yr - 2xs + s^2 - 3zu + 2xw - w^2 & = & 0 \\ xr + rs + 3tu - 2rw & = & 0 \\ xz - 2zs + 3yt + zw & = & 0 \\ xy + ys + 3zv - 2yw & = & 0 \end{array}$$

illetve:

4. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ és } D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ha D az A mátrix Jordan-alakja, akkor

$$\begin{array}{lcl} 3yu - 2xv + sv + vw & = & 0 \\ xu - 2su + 3rv + uw & = & 0 \\ xs + s^2 + 3zu + 6tv - xw - 3sw + 2w^2 & = & 0 \\ 3zr - 2xt + st + tw & = & 0 \\ 3yr - 2xs + s^2 - 3zu + 2xw - w^2 & = & 0 \\ xr + rs + 3tu - 2rw & = & 0 \\ xz - 2zs + 3yt + zw & = & 0 \\ xy + ys + 3zv - 2yw & = & 0 \\ 2x^2 + 3yr - xs + 6zu - 3xw + sw + w^2 & = & 0 \\ 3s^2u + 3zu^2 - 2xrv- & & \\ 5rsv - 2xuw - 2suw + rvw + uw^2 & = & 0 \end{array}$$

Bizonyítás. A bizonyítás érdekessége, az hogy egy algoritmus megírását jelenti, amely megteremti a kapcsolatot a Gröbner bázisok elméletével.

Az alábbiakban az általunk szerkesztett algoritmus és program leírását adjuk, ez utóbbit a 4. tétel bizonyítására. Legyen

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ k & m & n \end{pmatrix},$$

és legyen $A = CDC^{-1}$. Az alábbi programot *Singular*ban írtuk:

```
ring R=0,(a,b,c,f,g,h,k,m,n,l,
          x,y,z,r,s,t,u,v,w),(dp(10),dp(9));
matrix    A[3][3]  = x,y,z,r,s,t,u,v,w;
matrix    D[3][3]  = l,1,0,0,l,0,0,0,l; (*)
matrix    C[3][3]  = a,b,c,f,g,h,k,m,n;
matrix  Cadj[3][3] = gn-hm,cm-bn,bh-cg,
                     hk-fn,an-ck,cf-ah,
                     fm-gk,bk-am,ag-bf;
matrix B[3][3] = C*D*Cadj;
matrix M[3][3] = A - B;
ideal i=agn+cfm+bhk-cgk-ahm-bfn-1,
        M[1,1],M[1,2],M[1,3],M[2,1],M[2,2],
        M[2,3],M[3,1],M[3,2],M[3,3]; i;
ideal j=eliminate(i,abcfghkmnl); j;
```

Ezzel az A elemeit paraméteresen megadtuk. Ezek az i ideál generátorai.

```
i[1]=-cgk+bhk+cfm-ahm-bfn+agn-1
i[2]=cgkl-bhkl-cfml+ahml+bfnl-agnl-ahk+afn+x
i[3]=ack-a2n+y
i[4]=-acf+a2h+z
i[5]=-fhk+f2n+r
i[6]=cgkl-bhkl-cfml+ahml+bfnl-agnl+cfk-afn+s
i[7]=-cf2+afh+t
i[8]=-hk2+fkn+u
i[9]=ck2-akn+v
i[10]=cgkl-bhkl-cfml+ahml+bfnl-agnl-cfk+ahk+w
```

Az elimináció a j ideált adja.

```
j[1]=3yu-2xv+sv+vw
j[2]=xu-2su+3rv+uw
j[3]=xs+s2+3zu+6tv-xw-3sw+2w2
j[4]=3zr-2xt+st+tw
j[5]=3yr-2xs+s2-3zu+2xw-w2
```

```
j[6]=xr+rs+3tu-2rw
j[7]=xz-2zs+3yt+zw
j[8]=xy+ys+3zv-2yw
j[9]=2x2+3yr-xs+6zu-3xw+sw+w2
j[10]=3s2u+3zu2-2xrv-5rsv-2xuw-2suw+rvw+uw2

j[11]=rsu+tu2-r2v-ruw
j[12]=3zs2-2xyt-5yst+3z2u-2xzw-2zsw+ytw+zw2
j[13]=yzs-y2t+z2v-yzw
```

Ezek éppen a keresett feltételek (az utolsó három polinom mellőzhető, lásd alább). A többi bizonyítás – a (1...6) tételekre – ehhez hasonló, mindössze a (*)-gal jelölt sorban a D mátrix értelmezését kell átcserélni, illetve a dimenzió változásával a polinomgyűrű definícióját az algoritmus első két sorában. ■

A második esetben az alábbi tételeket jelenthetjük ki Frobenius- illetve Jordan-alakokra.

5. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ és } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^3 \\ 1 & 0 & 3\lambda^2 \\ 0 & 1 & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

Ha F az A mátrix Frobenius-alakja, akkor

$$\begin{aligned} lrrx^2 + 3yr - xs + s^2 + 3zu + 3tv - xw - sw + w^2 &= 0 \\ \\ 9xyr + 10x^2s + 66yrs - 28xs^2 + 19s^3 + \\ +9xzu - 15zsu + 81ytu + 81zrv - 72xtv + \\ +66stv - 85x^2w - 300yrw + 111xsw - 104s^2w - \\ -219zuw - 219tvw + 67xw^2 + 86sw^2 - 76w^3 &= 0 \\ \\ 27y^2r^2 - 10x^3s - 75xyrs + 28x^2s^2 + \\ +9yrs^2 - 19xs^3 - 9x^2zu + 27yzru + \\ +15xzsu - 81xytu - 81xzrv + 72x^2tv + \\ +27yrtv - 66xstv + 85x^3w + 291xyrw - \\ -111x^2sw - 9yrsw + 104xs^2w + \\ +219xzuw + 219xtvw - 67x^2w^2 + \\ +9yrw^2 - 86xsw^2 + 76xw^3 &= 0. \end{aligned}$$

6. tétel. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ és } D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ha D az A mátrix Jordan-alakja, akkor

$$\begin{aligned} lrrx^2 + 3yr - xs + s^2 + 3zu + 3tv - xw - sw + w^2 &= 0 \\ \\ 3xyr + 11x^2s + 45yrs - 17xs^2 + 14s^3 + \\ +3xzu + 18zsu + 27ytu + 27zrv - 24xtv + \\ +45stv - 7x^2w - 36yrw + 8xsw - 21s^2w - \\ -9zuw - 9tvw + xw^2 + 15sw^2 - 4w^3 &= 0 \\ \\ 9y^2r^2 - 11x^3s - 48xyrs + 17x^2s^2 + \\ +3yrs^2 - 14xs^3 - 3x^2zu + 9yzru - \\ -18xzsu - 27xytu - 27xzrv + 24x^2tv + \\ +9yrtv - 45xstv + 7x^3w + 33xyrw - \\ -8x^2sw - 3yrsw + 21xs^2w + 9xzuw + \\ +9xtvw - x^2w^2 + 3yrw^2 - 15xsw^2 + 4xw^3 &= 0. \end{aligned}$$

Megadható egy általános, dimenziófüggetlen program. Ennek egyik lehetséges megfogalmazása az alábbi (itt Jordan-alakra konkretizálva):

```
LIB "linalg.lib";
LIB "elim.lib";
int k = 4; int n = k*k;
ring R=0,(x(1..n),y(1..n),l),(dp(n),dp(n),dp);
ideal e=ideal(l,l);
intvec s=3,1;
intvec m=1,1;
matrix D=jordanmatrix(e,s,m);
matrix C=genericmat(k,k,ideal(y(1..n)));
matrix Cadj=adjoint(C);
matrix A=C*D*Cadj;
matrix M=genericmat(k,k,ideal(x(1..n)));
matrix B=M-A;B;
ideal I=det(C)-1,B;
poly elipoly=l;
```

```
for(int i=1;i<=n;i++) {
  elipoly=elipoly*y(i); };
intvec v=hilb(std(I));
ideal K=eliminate(I,elipoly,v);
```

A program által meghatározott ideál nem a minimálisan lehetséges számú generátort tartalmazza. Ezért egy további redukciós algoritmus alkalmazása szükséges, amellyel a fölösleges bázispolinomok kiküszöbölhetők. Ez az algoritmus (program) általános alakban az alábbi.

```
// x értéke: a K ideál polinom-generátorainak
//           kezdeti száma
int p;
for( p = x-1; p >= 1; p-- )
{
  ideal KK=K[1..p];
  if( reduce(K[p+1],std(KK))!=0 )
  { break; }
}
```

Összefoglalás és néhány megjegyzés

A bemutatott módszer érdekessége az, hogy adott mátrix esetében algebrai feltételt tudunk megadni annak jellemzésére, hogy az adott mátrix bizonyos kanonikus cella-struktúrával rendelkezzen anélkül, hogy a szokásos karakterisztikus egyenletre, sajátértékekre, sajátvektorokra, invariáns alterekre és egyebekre hivatkoznánk. A feltétel könnyen ellenőrizhető, hiszen a mátrixelemeknek egy többváltozós polinomiális egyenletrendszerbe történő behelyettesítését jelenti csupán.

Jegyezzük meg azt is azonban, hogy gyakorlati alkalmazását nehezíti a Gröbner-bázis algoritmusának komplexitása. A jelenlegi átlagos számítástechnikai kapacitással csak a három- és negyedrendű mátrixok kezelése lehetséges hatékonyan.

Végül néhány megjegyzés.

1. megjegyzés. *Az 3. és 4. tételekben megadott algebrai sokaságok részsokaságok a 5. illetve 6. tételekben megadott 3-3 polinom által definiált algebrai sokaságban. Ez szintén algoritmikusan ellenőrizhető, ennek részleteire most nem térünk ki.*

2. megjegyzés. *Az 3., 4., 5. illetve 6. tételekben megadott algebrai sokaságok illetve ideálok a Frobenius- (vagy Jordan-) szerkezet függvényei, s nem függnek a cellák mátrixon belüli helyétől. Ez ugyancsak algoritmikusan bizonyítható.*

3. megjegyzés. *A fentebbi tételekben kapott feltételek szigorú értelemben szükséges feltételeket adnak arra nézve, hogy tetszőleges mátrixnak adott Frobenius- (vagy Jordan-) szerkezete legyen. Ezek néha elégségesek is, de adható ellenpélda, amikor a feltételek nem elégségesek.*

Nyitott kérdés: Mennyire közeliek ezek a szükséges feltételek az elégséges feltételekhez?

Könyvészet

1. David Cox, John Little, Donal O'Shea *Ideals, varieties, and algorithms*, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer Verlag, New York, (1997)

2. Gert-Martin Greuel, *A "Singular" Introduction to Commutative Algebra*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2002

3. G.-M.Greuel, G.Pfister, and H.Schönemann, *Singular 2.0, A Computer Algebra System for Polynomial Computations*, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2001). `http://www.singular.uni-kl.de`.

4. A. Horváth, An Applicaton of Gröbner Bases, - *Profesor Gheorghe Fărcaş la vârsta de 70 de ani - volum omagial*, Editura Universităţii "Petru Maior", (2004), Tg-Mureş, ISBN 973-7794-07-9. pag. 97-102.

5. Wolmer V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin; 1998

Véges és végtelen szavak bonyolultsága

Kása Zoltán
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Kar
Email: kasa@cs.ubbcluj.ro

Bevezetés

Legyen Σ jeleknek egy véges és nem üres halmaza, amelyet ábécének nevezünk, elemeit pedig betűknek. Az ábécé betűiből szavakat képezünk. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma, n \geq 0$, akkor $a_1 a_2 \ldots a_n$ a Σ ábécé betűiből képzett szó (az a_i-k nem feltétlenül különbözők). A szót alkotó betűk száma, multiplicitással számolva, a szó hossza. Ha $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, akkor a w szó hossza $|w| = n$. Ha $n = 0$, akkor a szó egyetlen betűt sem tartalmaz, és üres szónak nevezzük. Jelölése: ε.

Természetszerűleg értelmezhetjük a végtelen szó fogalmát is, végtelen sok betűt helyezve egymás után: $u = u_0 u_1 u_2 \ldots u_n \ldots, \quad u_i \in \Sigma$.

A Σ betűiből képezhető véges szavak halmazának jelölésére a Σ^* jelet használjuk:

$$\Sigma^* = \big\{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma,\, n \geq 0\big\}.$$

A nem üres szavak halmaza $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$. Az n hosszúságú szavak halmazát Σ^n-nel jelöljük, és természetesen $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$. Ekkor

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \cdots \cup \Sigma^n \cup \cdots \qquad \text{és} \qquad \Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots \cup \Sigma^n \cup \cdots .$$

Az $u = a_1 a_2 \ldots a_m$ és $v = b_1 b_2 \ldots b_n$ szavak egyenlők (azaz $u = v$), ha $m = n$ és $a_i = b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$. Azt mondjuk, hogy u részszava w-nek, ha $\exists x, y \in \Sigma^*$ úgy, hogy $w = xuy$.

Szavakat kétféleképpen szoktunk vizsgálni: egyrészt egy adott szó struktúráját vizsgáljuk, másrészt bizonyos módon felépített szóhalmazokat vizsgálunk.

A Σ^* tetszőleges L részhalmazát a Σ ábécé feletti nyelvnek nevezzük. Mivel a szavaknak nem tulajdonítunk értelmet, gyakran formális nyelvről beszélünk, hogy megkülönböztessük a természetes és a mesterséges nyelvektől, amelyekben a szavakhoz valamilyen értelem is kapcsolódik. A formális nyelveket a fordítóprogramok tervezésénél és megvalósításánál használjuk.

Jelen dolgozatban csupán a szavak struktúráját vizsgáljuk. Ha egy szóban sokszor ismétlődik egy részszó, akkor annak felépítése egyszerűbb, mintha részszavai mind különbözők lennének. Minél több, különböző részszava van egy adott szónak, annál bonyolultabbnak tekinthető. Ezen alapszik a részszóbonyolultság. Szavak bonyolultságát azonban másképp is lehet vizsgálni, például úgy, hogy megnézzük mennyire lehet tömöríteni (becsomagolni) az illető szót. Minél bonyolultabb, annál kevésbé tömöríthető.

Szóbonyolultság

Legyen $F(w)$ a $w \in \Sigma^*$ nem üres részszavainak a halmaza, és $F_n(w)$ a w szó n hosszúságú részszavainak a halmaza. Jelöljük $\#A$-val az A halmaz elemeinek a számát. A w részszóbonyolultsága (vagy csak röviden szóbonyolultsága):

$$f_w(n) = \#F_n(w), \quad 1 \leq n \leq |w|.$$

Hasonlóképpen végtelen szó esetében is: $f_u(n) = \#F_n(u)$.
Például, ha $w = abaaba$, akkor

$F_1(w) = \{a, b\}$, $F_2(w) = \{ab, aa, ba\}$,
$F_3(w) = \{aba, baa, aab\}$, $F_4(w) = \{abaa, baab, aaba\}$,
$F_5(w) = \{abaab, baaba\}$, $F_6(w) = \{abaaba\}$ és
$F_k(w) = \emptyset$, ha $k \geq 7$.

Példák végtelen szavakra:

1) Fibonacci-szó. Induljunk el egy kételemű $\Sigma = \{0, 1\}$ ábécéből, és ezen értelmezzük a $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$ morfizmust[†]. Ekkor $\sigma^2(0) = 010$, $\sigma^3(0) = 01001$, $\sigma^4(0) = 01001010$ és így tovább. Fibonacci-szónak nevezzük az így kapott sorozat határértékét, azaz

$$u_F = \lim_{n\to\infty} \sigma^n(0),$$

tehát $u_F = 0100101001001001010010010100100100101001001001010\ldots$
Be lehet bizonyítani, hogy $f_{u_F}(n) = n + 1$.

Az elnevezés utal a Fibonacci-számokkal való kapcsolatra. Képezzük a következő sorozatot: $f_0 = 0$, $f_1 = 01$, $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, ha $n \geq 2$. Ekkor $f_2 = 010$, $f_3 = 01001$, $f_4 = 01001010$, $f_5 = 0100101001001$ stb. Könnyű észrevenni, hogy $|f_n| = F_{n-2}$, ahol F_n az n-edik Fibonacci-szám.A Fibonacci-szó:

$$u_F = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Ugyanakkor, könnyen lehet bizonyítani, hogy $f_n = \sigma^n(0)$. Az u_F-nek megvan az az érdekes tulajdonsága is, hogy a morfizmus fixpontja, azaz $u_F = \sigma(u_F)$.

2) Hatványszó. A 01 mellé helyezzük a 0011 szót, majd újabb hasonló szót, amelyben eggyel növeljük a 0-k és 1-ek számát, és így tovább.
$u_p =$01 0011 000111 00001111$\ldots\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{1\ldots1}_{n}\ldots$

Be lehet bizonyítani, hogy $f_{u_p}(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

[†]Ha $u, v \in \Sigma^*$, akkor $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$

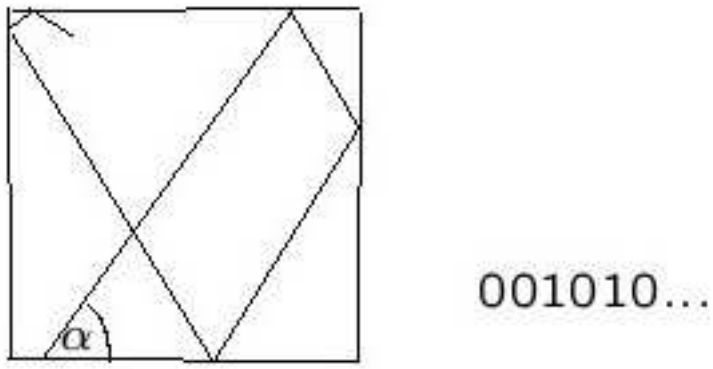
3) Champarnowne-szó. A természetes számokat egymás után írjuk a kettes számrendszerben.
$u_C = 0\ 1\ 10\ 11\ 100\ 101\ 110\ 111\ 1000\ 1001\ 1010\ 1011\ 1100\ 1101\ 1110\ 10000\ldots$
Mivel a szóban minden lehetséges n hosszúságú részszó szerepel, könnyű belátni, hogy $f_{u_C}(n) = 2^n$.

A végtelen $u = u_1u_2\ldots u_n\ldots$ szót periodikusnak nevezzük, ha léteznek a $p \geq 1$ és $n_0 \geq 1$ természetes számok úgy, hogy $u_i = u_{i+p}$ minden $i \geq n_0$-ra. A következő szavak például periodikusak:

$abcabcabc\ldots abc\ldots$

$aaaaabaabcabcabc\ldots abc\ldots$

Az olyan végtelen szavakat, amelyekre $f_u(n) = n + 1$, Sturm-típusú szavaknak nevezzük. A Fibonacci-szó Sturm-típusú. Sturm-típusú szavakat létrehozhatunk a következő eljárással: egy négyzet alakú biliárdasztalon egy irracionális α szög alatt elindítunk egy biliárdgolyót, amelyről feltételezzük, hogy a végtelenségig folytatja útját és minden ütközéskor egy-egy oldallal, szabályosan visszaverődik. Ha egy vízszintes oldalt érint, akkor a szóba beírunk egy 0-át, ha pedig függőleges oldalt, akkor egy 1-est. A Fibonacci-szó esetén $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, amely éppen az aranymetszési állandó.



Sturm-típusú szavak generálása

A feladat általánosítható, például hárombetűs ábécé esetén, négyzetes biliárd asztal helyett kockát veszünk, és a párhuzamos oldalakkal való ütközéskor a 0, 1 és 2 betűket írjuk be a szóba. Az ilyen szavak bonyolultsága $n^2 + n + 1$ [2]. Az eljárás folytatható tetszőleges véges dimenzióban.

A következő két tétel jellemzi a periodikus végtelen szavakat.

7. tétel. *Ha egy végtelen u szó periodikus és legkisebb periódusa p, akkor tetszőleges $n \geq p$-re $f_u(n) \leq n$.*

8. tétel. *Ha egy végtelen u szóra létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ értékre $f_u(n) \leq n$, akkor u periodikus.*

A Sturm-típusú szavak azok a nem periodikus szavak, amelyeknek legkisebb a szóbonyolultsága.

Érdekes eredmény a következő: Legyen $u = u_1 u_2 \dots u_n \dots$, $u_i \in \{0,1\}$, rendeljük hozzá a $\theta = 0.u_1 u_2 \dots u_n \dots$ kettes számrendszerbeli számot. Ha u Sturm-típusú szó, akkor θ transzcendens szám [5].

Egy másik érdekes eredményt a következő általánosítással kapunk. Egy hárombetűs ábécén a következő morfizmust értelmezzük: $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 02$, $\sigma(2) = 0$. Ennek a fixpontja a Tribonacci-szó, amelyet a Fibonacci-szóhoz hasonlóan a következőképpen is megkaphatunk:

$t_0 = 0$, $t_1 = 01$, $t_2 = 0102$, $t_n = t_{n-1}t_{n-2}t_{n-3}$, ha $n \geq 3$, és $u_T = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

A morfizmus mátrixa és karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\beta > 1$ és $\alpha, \overline{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
A komplex sík következő pontjai

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i\geq 0} \varepsilon_i \, \alpha^i ; \, \varepsilon_i = 0,1; \, \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} \neq 0 \right\} \subset \mathbf{C}$$

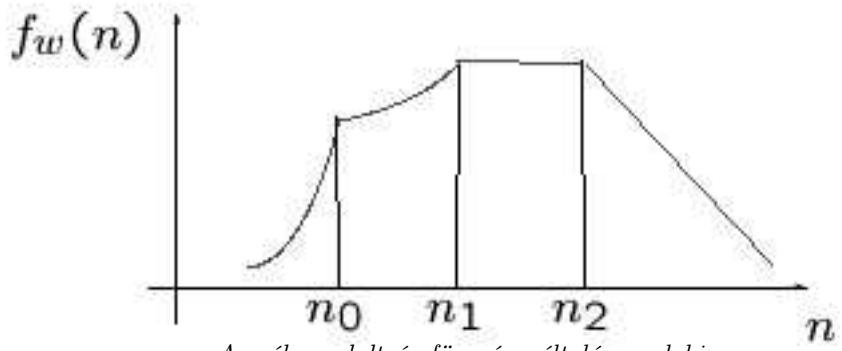
az ún. Rauzy-fraktált képezik.

Rauzy-fraktálok

A következő táblázat néhány w szónak megadja az $f_w(n)$ szóbonyolultságát:

w	$f_w(1)$	$f_w(2)$	$f_w(3)$	$f_w(4)$	$f_w(5)$	$f_w(6)$	$f_w(7)$	$f_w(8)$
11111111	1	1	1	1	1	1	1	1
12121212	2	2	2	2	2	2	2	1
11211122	2	4	5	5	4	3	2	1
11211211	2	3	3	3	3	3	2	1
11211212	2	3	4	4	4	3	2	1
11211221	2	4	5	5	4	3	2	1
11211222	2	4	5	5	4	3	2	1
11212111	2	3	5	5	4	3	2	1
11212112	2	3	4	5	4	3	2	1
11212122	2	4	4	4	4	3	2	1

A szóbonyolultság f függvényének általános alakja a következő ábrán látható, ahol $n_0 \leq n_1 \leq n_2$. A függvény n_0-ig exponenciálisan nő, majd n_1-ig (általánosan nem ismert módon) nő, majd n_2-ig állandó, utána pedig egyesével csökken [12].



A szóbonyolultság-függvény általános alakja

Véges szavakra értelmezzük a maximális bonyolultságot

$$C(w) = \max\{f_w(n) \mid n \geq 1\},$$

valamint a globális maximális bonyolultságot Σ^n-ben:

$$K(n) = \max\{C(w) \mid w \in \Sigma^n\}.$$

Legyen

$$R(n) = \big\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \exists w \in \Sigma^n : f_w(i) = K(n)\big\}$$

azon i természetes számok halmaza, amelyekre $f_w(i)$ maximális. Ez a halmaz egy vagy két elemet tartalmaz. $R(n)$ azt mutatja meg, hogy milyen hosszúságú részszavakból van a legtöbb az n hosszúságú szavakban.

Legyen $M(n)$ azon Σ^n-beli szavak száma, amelyek maximális bonyolultsága egyenlő a globális maximális bonyolultsággal, azaz

$$M(n) = \#\big\{w \in \Sigma^n \mid C(w) = K(n)\big\}.$$

Érvényesek a következő tételek [1]:

9. tétel. *Ha* $\#\Sigma = q$ *és* $q^k + k \leq n \leq q^{k+1} + k$, *akkor* $K(n) = n - k$.

10. tétel. *Ha* $\#\Sigma = q$ *és* $q^k + k < n < q^{k+1} + k + 1$, *akkor* $R(n) = \{k + 1\}$; *ha* $n = q^k + k$, *akkor* $R(n) = \{k, k + 1\}$.

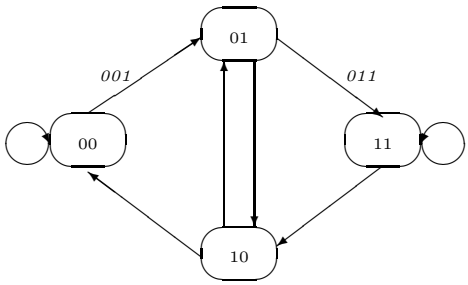
A következő táblázat $K(n)$, $R(n)$ és $M(n)$ értékeit tartalmazza $1 \leq n \leq 20$ értékekre.

n	$K(n)$	$R(n)$	$M(n)$
1	1	1	2
2	2	1	2
3	2	1, 2	6
4	3	2	8
5	4	2	4
6	4	2, 3	36
7	5	3	42
8	6	3	48
9	7	3	40
10	8	3	16
11	8	3, 4	558
12	9	4	718
13	10	4	854
14	11	4	920
15	12	4	956
16	13	4	960
17	14	4	912
18	15	4	704
19	16	4	256
20	16	4, 5	79006

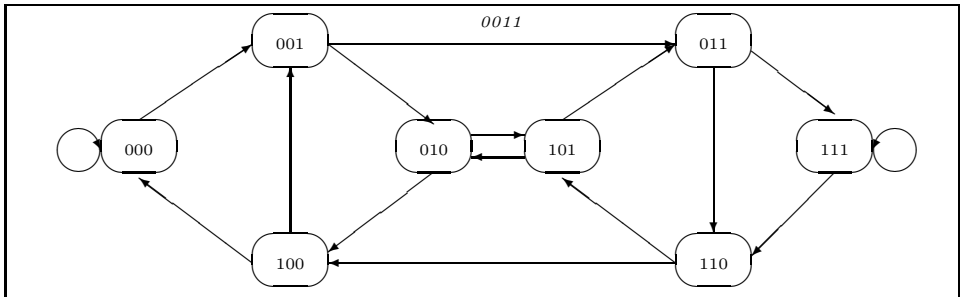
De Bruijn-gráfok

Legyen Σ egy q-betűs ábécé. A $B(q,k) = (V(q,k), E(q,k))$ De Bruijn-gráf csúcshalmaza $V(q,k) = \Sigma^k$, élhalmaza $E(q,k) = \Sigma^{k+1}$. Van él $x_1x_2\ldots x_k$-ból $y_1y_2\ldots y_k$-ba, ha $x_2x_3\ldots x_k = y_1y_2\ldots y_{k-1}$, és az él $x_1x_2\ldots x_ky_k$.

A De Bruijn-gráfok sok, szóbonyolultsággal kapcsolatos kérdésre adnak választt.



A B(2,2) De Bruijn-gráf



A B(2,3) De Bruijn-gráf

A $B(2,3)$ gráfban a 001, 011, 111, 110 csúcsok alkotta útnak megfelel az 001110 szó, amely az egymás melletti szavak maximális átfedése által hozható létre.

A következő út: 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100, amelynek a 0001110100 szó felel meg, egy Hamilton-út, mivel tartalmazza a gráf minden csúcsát. Általában a $B(q,k)$ gráfban a leghosszabb út (amely Hamilton-út) egy ún. De Bruijn-szót eredményez, amelynek az a tulajdonsága, hogy tartalmazza az összes k hosszúságú szót a q-betűs ábécé fölött. A De Bruijn-szavak, mint maximális bonyolultságúak, fontos szerepet játszanak a szóbonyolultság vizsgálatában.

A nem irányított de Bruijn-gráfok hálózati modellként használhatók, mivel megvan az a jó tulajdonságuk, hogy többszörösen összefüggők, tehát akkor is van út két csúcs között, ha éleket törölünk a gráfból.

A De Bruijn-gráfok segítségével kiszámíthatjuk az $M(n)$ értékeit [1]:

11. tétel. *Ha* $\#\Sigma = q$ *és* $q^k + k \leq n \leq q^{k+1} + k$, *akkor* $M(n)$ *egyenlő a különböző* $n-k-1$ *hosszúságú utakkal a* $B(q,k+1)$ *gráfban.*

Például ha $k=2$, akkor a $2^2+2 \leq n \leq 2^3+2$ összefüggésekből $n=6$-ot választva $n-k-1=3$, és $B(2,3)$-ban összesen 36 különböző 3-hosszúságú út van. A 000, 111, 010, 101 csúcsokból kiindulva négy-négy különböző út van (ez összesen 16), a többi négy csúcsból pedig öt-öt (ez összesen 20).

$M(n)$ pontos értékét csak a következő tételek eseteiben ismerjük.

12. tétel. *Ha* $n = 2^k + k - 1$, *akkor* $M(n) = 2^{2^{k-1}}$.

Ezt az eredményt általánosan is lehet bizonyítani.

13. tétel. *Ha* $n = q^k + k - 1$, *akkor* $M(n) = (q!)^{q^{k-1}}$.

Élfüggetlen Hamilton-körök De Bruijn-gráfokban

Két Hamilton-kört élfüggetlennek nevezünk, ha nincs közös élük. Elindulva egy régi sejtésből, egy újabbat fogalmazunk meg.

1. sejtés (Bond, Iványi 1988). *A $B(q,k)$ gráfban, ahol $q \geq 2$ és $k > 1$ az élfüggetlen Hamilton-körök száma $q-1$.*

Értelmezzük egy De Bruijn-szóban a nem nulla betűk következő cirkuláris permutációit k pozícióval ($k = 1, 2, \ldots, q-2$):

$$\begin{aligned} p_k(i) &:= (i+k) \bmod q + (i+k) \operatorname{div} q, \quad i = 1, 2, \ldots, q-1 \\ p_k(0) &:= 0. \end{aligned}$$

Észrevehető, hogy $p_k(i) = p_1^k(i)$.
Egy H_0 Hamilton-körhöz rendeljük hozzá a megfelelő De Bruijn-szót. Ebből kiindulva, a p_k ($k = 1, 2, \ldots q-2$) permutációkat használva De Bruijn-szókat kapunk, amelyek a $H_1, H_2, \ldots, H_{q-2}$ Hamilton-köröknek felelnek meg.
Például. A $B(4,2)$ gráfban legyen H_0 a $w = 00102113230331220$ szónak megfelelő Hamilton-kör. Ekkor:
p_1 $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$
p_2 $(1 \to 3 \to 2 \to 1)$
alapján a következő szavakat kapjuk:
$p_1(w) = 00203221310112330$
$p_2(w) = 00301332120223110$
és ezeknek a H_1 és H_2 Hamilton-körök felelnek meg.
Most már kijelenthetjük a következő sejtést [8]:

2. sejtés. *A $B(q,k)$ De Bruijn-gráfban ($q > 2, k > 1$) létezik egy H_0 Hamilton-kör, amely a p_k ($k = 1, 2, \ldots q-2$) permutációk által kapott H_1, H_2, $\ldots H_{q-2}$ Hamilton-körökkel együtt páronként élfüggetlen.*

Példák:
$B(3,2)$
H_0 : 0011220210,
H_1 : 0022110120
$B(3,3)$
H_0 : 000100210110222020121112212 00,
H_1 : 000200120220111010212221121 00
$B(4,2)$
H_0 : 00102113230331220,
H_1 : 00203221310112330,
H_2 : 00301332120223110
$B(5,2)$
H_0 : 0010211204142243033231344 0,
H_1 : 0020322301213314044342411 0,
H_2 : 0030433402324421011413122 0,
H_3 : 0040144103431132022124233 0

Az élfüggetlenséget könnyű megvizsgálni a fenti szavakban is, anélkül, hogy hozzárendelnénk a megfelelő Hamilton-köröket. Ehhez csupán azt kell megnéznünk, hogy a szavakban a $k+1$ hosszúságú részszavak mind különbözők-e.

Véges szavak teljes szóbonyolultsága

Ha egy véges szóban az összes nem üres részszót számoljuk meg, akkor teljes bonyolultságról beszélünk:

$$\mathbf{K}(w) = \sum_{i=1}^{|w|} f_w(i)$$

Felsorolunk néhány eredményt, amely teljes szóbonyolultsággal kapcsolatos [7]. Egy tetszőleges szó triviális, ha csupán egy betűből épül fel.

14. tétel.
• *Ha* $C \neq 1, 2, 4$, *akkor létezik egy nem triviális* w *szó úgy, hogy* $\mathbf{K}(w) = C$.
• *Ha* $C \neq 1, 2, 4, 6, 10, 18, 22$, *akkor létezik egy nem triviális* $w \in \Sigma^*$ *szó, ahol* $\#\Sigma = 2$ *úgy, hogy* $\mathbf{K}(w) = C$.

Ha $\#\Sigma = n$, akkor jelöljük $\varphi_n(C)$-vel azon $w \in \Sigma^n$ szavak számát, amelyre $\mathbf{K}(w) = C$. Például, ha $n = 5$, akkor

C	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi_5(C)$	5	0	0	0	60	0	200	400	1140	1200	120

Feltevődik a kérdés, hogy létezik-e olyan C érték, hogy attól kezdve a maximális $\frac{n(n+1)}{2}$ értékig, mindig legyen olyan n hosszúságú szó, amelynek a teljes bonyolultsága éppen az a C érték legyen. A [7]-ben megfogalmazott sejtést, hogy ha

$$k = \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 2 + i, \quad \ell \geq 2, \quad 0 \leq i \leq \ell,$$

akkor létezik

$$b_k = \frac{\ell(\ell^2-1)}{2} + 3\ell + 2 + i(\ell+1),$$

amelyre

$$\varphi_k(C) \neq 0, \quad \forall C \text{ amelyre } b_k \leq C \leq \frac{k(k+1)}{2},$$

Levé és Séébold bebizonyította [9].

Előbbi példánkban $n = 5 = \frac{2\cdot 3}{2} + 2 + 0$ tehát $\ell = 2, i = 0$, és $b_5 = \frac{2\cdot 5}{2} + 3 \cdot 2 + 2 + 0 = 11$.

Végtelen szavak teljes szóbonyolultsága

A maximális és a teljes szóbonyolultságokat értelmezni lehet a végtelen szavakon is [4]. Legyen $u = u_1u_2\ldots$ egy végtelen szó és legyenek

$$\mathbf{K}_u^+(n) = \max_i \mathbf{K}(u_iu_{i+1}\ldots u_{i+n-1})$$

$$\mathbf{C}_u^+(n) = \max_i \mathbf{C}(u_iu_{i+1}\ldots u_{i+n-1}).$$

Hasonlóképpen lehet értelmezni a legkisebb értékeket is:

$$\mathbf{K}_u^-(n) = \min_i \mathbf{K}(u_iu_{i+1}\ldots u_{i+n-1})$$

$$\mathbf{C}_u^-(n) = \min_i \mathbf{C}(u_iu_{i+1}\ldots u_{i+n-1}).$$

Ekkor ezekkel is lehet jellemezni a periodikus és a Sturm-típusú szavakat, akárcsak a részszóbonyolultsággal, ahogy azt a következő táblázat tartalmazza.

Ha u nem periodikus akkor	Ha u Sturm-típusú akkor
$f_u(n) \geq n+1$	$f_u(n) = n+1$
$\mathbf{C}_u^+(n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$	$\mathbf{C}_u^+(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$
$\mathbf{K}_u^+(n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} + n \right\rfloor$	$\mathbf{K}_u^+(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} + n \right\rfloor$

A szóbonyolultságon kívül a szavakkal kapcsolatos ún. szókombinatorikai problémákról a [10] és [11] könyvekben olvashatunk.

Könyvészet

1 Anisiu, M-C., Blázsik, Z., Kása, Z., Maximal Complexity of Finite Words, *Pure Math. and Appl.*, **13**, 1–2 (2002) pp. 39–48.

2 Arnoux, P., Mauduit, C., Shiokawa, I., Tamura, J-I., Complexity of Sequences Defined by Billiards in the Cube, *Bull. Soc. Math. France*, **122** (1994) pp. 1–12.

3 Bond, J., Iványi, A., Modeling of Interconnection Networks Using de Bruijn Graphs, *Third Conference of Program Designers,* July 1-3, 1987, Eötvös Loránd University, Faculty of Natural Sciences, Budapest, 1987, pp. 75-88.

4 Ferenczi, S., Kása, Z., Complexity for Finite Factors of Infinite Sequences, *Theoretical Computer Science*, **218** (1999) pp.l 177–195.

5 Ferenczi, S., Mauduit, C., Transcendence of Numbers with a Low Complexity Expansion, *Journal of Number Theory*, **67**, 2 (1997) pp. 146–161.

6 Iványi, A, On the d-complexity of Words, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **8** (1987) pp. 69-90.

7 Kása, Z., On the d-complexity of Strings, *Pure Math. and Appl.*, **9**, 1–2 (1998) pp. 119–128.

8 Kása, Z., De Bruijn Graphs and Complexity of Words, *5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, June 9–12, 2004, Debrecen, Hungary*

9 Levé, F., Séébold, P., Proof of a Conjecture on Word Complexity, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **8**, 2 (2001) pp. 277–291 .

10 Lothaire, M. *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

12 Lothaire, M. *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

12 De Luca, A., On the Combinatorics of Finite Words, *Theoretical Computer Science*, **218** (1999) pp. 13–39.

A kúpszeletek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben

Kiss Sándor
Faipari Líceum, Szatmárnémeti
Email: sandor.kiss@freemail.hu, kiss@datec.ro

Bevezetés

Az ellipszist, a hiperbolát és a parabolát közös néven kúpszeleteknek hívjuk, mivel ezek a síkbeli görbék valamely kúpfelület síkmetszeteiként is előállíthatók. Az analitikus mértan vagy más néven koordinátageometria megszületése (17. század) óta a kúpszeleteket a különböző típusú egyenleteik segítségével is jellemezhetjük és tanulmányozhatjuk. A legismertebbek a kúpszeletek ún. kanonikus egyenletei, amelyeket úgy kapunk, hogy koordinátatengelyekként szimmetriatengelyeiket vesszük (parabolánál ordinátatengelyként az egyetlen szimmetriatengelyre merőleges, a tengelypontot tartalmazó, egyenest). Ezekben az xOy-nal jelölt derékszögű vonatkoztatási rendszerekben az ellipszis, a hiperbola ill. a parabola egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = a^2 - c^2) \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = c^2 - a^2) \tag{2}$$

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

ahol a és b a féltengelyek hossza, $2c$ a fókusztávolság, p pedig a parabola paramétere. A kanonikus egyenletek mellett a vonatkoztatási rendszerek megválasztásától függően kapjuk a kúpszeletek csúcsponti, fokális, paraméteres, polárkoordinátás stb. egyenleteit. Ezek egy részének közös jellemzője, hogy derékszögű koordinátarendszerekhez kötődnek. Ebben a cikkben azt vizsgáljuk, hogy a kúpszeletek kanonikus egyenletei hogyan módosulnak, ha vonatkoztatási rendszerekként a konjugált átmérőik tartóegyeneseiből álló ferdeszögű koordinátarendszereket vagy hiperbolánál az aszimptotákból álló koordinátarendszert választjuk (a ferdeszögű koordinátarendszerek alkalmazásaival kapcsolatban lásd [2]-t).

E cikkben a kúpszeletekkel kapcsolatos elemi fogalmakon kívül néhány lineáris algebrai fogalmat is használunk. Elsősorban arra gondolunk, hogy báziscserénél egy vektor koordinátái hogyan változnak meg. Az ide vonatkozó, koordinátatranszfomációkkal kapcsolatos, legalapvetőbb ismereteket az alábbiakban összefoglaljuk (bővebben lásd [1]-et).

Ha (V, K) a K test feletti n dimenziós bal oldali vektortér, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ ennek egy bázisa, akkor az $x \in V$, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ vektorhoz rendeljük hozzá az $[x]_B = [x_i]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ oszlopvektort. Tekintsük az

$$\overline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

vektorsorozatot. A $\overline{B} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ vektorhalmaz akkor és csak akkor bázis, ha az

$$A = [\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n]_B = [\alpha_{ij}] \tag{4}$$

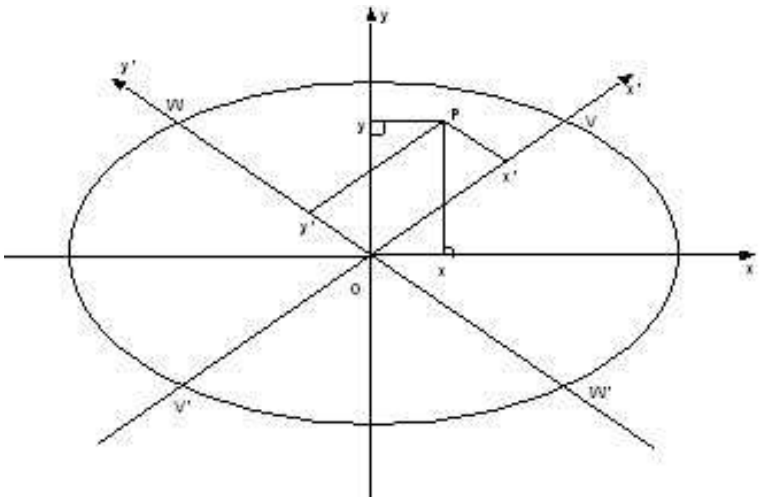
mátrix nem szinguláris. Ekkor A-t a B bázisról a $\overline{B}$ bázisra való *áttérési mátrix-nak* hívjuk. Ha $[x]_B = [x_i]$, és $[x]_{\overline{B}} = [\overline{x}_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor az x vektor B és $\overline{B}$ bázisokra vonatkozó koordinátái között az $x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{x}_j$ összefüggések állnak fenn, melyeket mátrix alakban a következőképpen írhatunk:

$$[x]_B = A \cdot [x_i]_{\overline{B}} \Leftrightarrow [x]_{\overline{B}} = A^{-1} \cdot [x_i]_B. \tag{5}$$

A továbbiakban vizsgálatainkat a kétdimenziós euklideszi vektortérben (síkban) végezzük, amelynek ortonormált bázisát $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$-vel fogjuk jelölni.

Az ellipszis egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében

Legyen V az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kanonikus egyenletű E ellipszis tetszőleges (u, v) koordinátájú pontja, ahol $2a$ az ellipszis nagy-, $2b$ kistengelyének hossza, $2c$ pedig a fókusztávolsága. Az ellipszis két szimmetriatengelyéből álló derékszögű koordinátarendszer kezdőpontját jelölje O, az OV irány konjugált iránya pedig legyen OW, ahol $W \in E$ (lásd az ábrát). Meghatározzuk a W pont (α, β) koordinátáit az u és v függvényében.



Ha VV' és WW' az ellipszis konjugált átmérői, akkor a W ill. W' pontban az ellipszis érintője párhuzamos VV'-vel (lásd az 1. alkalmazást), azaz $v = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot u$ Tehát:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot u^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\frac{u^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{u^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{\beta} - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{u}{\beta} + \frac{a}{b}\right) = 0.$$

Következésképpen $\beta = \pm\dfrac{b}{a} \cdot u$ és $\alpha = \mp\dfrac{a}{b} \cdot v$, azaz $W\left(-\dfrac{a}{b} \cdot v, \dfrac{b}{a} \cdot u\right)$. Vagy ha $V(a\cos t, b\sin t)$, akkor $W(-a\sin t, b\cos t)$, ahol $t \in [0, 2\pi)$.

A konjugált irányokba eső $V(u, v)$ és $W(\alpha, \beta)$ ellipszispontok koordinátái kielégítik az $uv + \alpha\beta = 0$ összefüggést.

Az OV ill. OW szakasz hossza legyen p ill. q. Tekintsük most az $\vec{e}_1 = \frac{1}{p}\overrightarrow{OV}$ és $\vec{e}_2 = \frac{1}{q}\overrightarrow{OW}$ bázisvektorú $x'Oy'$ normált ferdeszögű koordinátarendszert. Egy tetszőleges P pont xOy rendszerbeli koordinátái legyenek (x, y), $x'Oy'$ rendszerbeli koordinátái pedig (x', y'). Mivel

$$\vec{e}_1 = \frac{u}{p}\vec{\imath} + \frac{v}{p}\vec{\jmath} \text{ és } \vec{e}_2 = -\frac{av}{bq}\vec{\imath} + \frac{bu}{aq}\vec{\jmath},$$

az xOy rendszerből az $x'Oy'$ rendszerbe való áttérési mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{p} & -\dfrac{av}{bq} \\ \\ \dfrac{v}{p} & \dfrac{bu}{aq} \end{pmatrix}.$$

Tehát (5) alapján

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{p} & -\dfrac{av}{bq} \\ \\ \dfrac{v}{p} & \dfrac{bu}{aq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

azaz

$$x = \frac{u}{p}x' - \frac{av}{bq}y' \tag{6}$$

és

$$y = \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'. \tag{7}$$

Következésképpen az E ellipszis $x'Oy'$ rendszerbeli egyenlete:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{u}{p}x' - \frac{av}{bq}y'\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} = 1.$$

Amint látható ez utóbbi egyenlet formálisan megegyezik az ellipszis kanonikus egyenletével. Ez nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy a kanonikus egyenletet sajátos esetként kapjuk, éspedig ha a V pont egybeesik az ellipszis $(a, 0)$ csúcspontjával (az ellipszis szimmetriatengelyei egymásra merőleges konjugált irányok). Ezek után kijelenthetjük, hogy az ellipszis egyenlete a konjugált irányok $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerében

$$\frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} = 1 \tag{8}$$

alakú, ahol $2p$ ill. $2q$ a konjugált átmérők hosszát jelentik.

Megjegyzés. *Az átmérők nagyságrendi alapon történő megkülönböztetése (nagy- és kisátmérő vagy nagy- és kistengely) csak a kanonikus egyenlet esetében lehetséges, ti. ekkor $2p = 2a$ a legnagyobb, $2q = 2b$ a legkisebb az ellipszis átmérői között. Különben pedig az OV bizonyos irányaira $p < q$, más irányaira viszont $p > q$.*

A hiperbola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében

Legyen V az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ kanonikus egyenletű H hiperbola tetszőleges (u, v) koordinátájú pontja, ahol $2a$ a hiperbola valós, $2b$ képzetes tengelyének hossza, $2c$ pedig a fókusztávolsága. A hiperbola két szimmetriatengelyéből álló derékszögű koordinátarendszer kezdőpontját jelölje O, az OV irány konjugált iránya pedig legyen OW, $W \in \overline{H}$, ahol $\overline{H}$ a H hiperbola konjugált hiperbolája. Meghatározzuk a W pont (α, β) koordinátáit az u és v függvényében.

Ha VV' és WW' a hiperbola konjugált átmérői, akkor a W ill. W' pontban a konjugált hiperbola érintője párhuzamos VV'-vel (lásd az 1. alkalmazást), azaz $v = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot u$. Tehát:

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot u^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\left(-1 + \frac{\beta^2}{b^2}\right)\frac{u^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{u^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{\beta} - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{u}{\beta} + \frac{a}{b}\right) = 0.$$

Következésképpen $\beta = \pm\dfrac{b}{a} \cdot u$ és $\alpha = \mp\dfrac{a}{b} \cdot v$, azaz $W\left(\dfrac{a}{b} \cdot v, \dfrac{b}{a} \cdot u\right)$. Vagy ha $V\left(\dfrac{a}{\cos t}, b\operatorname{tg} t\right)$, akkor $W\left(a\operatorname{tg} t, \dfrac{b}{\cos t}\right)$, ahol $t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

A konjugált irányokba eső $V(u, v)$ és $W(\alpha, \beta)$ hiperbolapontok koordinátái kielégítik az $uv - \alpha\beta = 0$ összefüggést.

Az OV ill. OW szakasz hossza legyen p ill. q. Tekintsük most az $\vec{e}_1 = \frac{1}{p}\overrightarrow{OV}$ és $\vec{e}_2 = \frac{1}{q}\overrightarrow{OW}$ bázisvektorú $x'Oy'$ normált ferdeszögű koordinátarendszert.

Egy tetszőleges P pont xOy rendszerbeli koordinátái legyenek (x, y), $x'Oy'$ rendszerbeli koordinátái pedig (x', y'). Mivel

$$\vec{e}_1 = \frac{u}{p}\vec{\imath} + \frac{v}{p}\vec{\jmath} \text{ és } \vec{e}_2 = \frac{av}{bq}\vec{\imath} + \frac{bu}{aq}\vec{\jmath},$$

az xOy rendszerből az $x'Oy'$ rendszerbe való áttérési mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & \frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix}.$$

Tehát (5) alapján

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & \frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

azaz

$$x = \frac{u}{p}x' + \frac{av}{bq}y' \tag{9}$$

és

$$y = \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'. \tag{10}$$

Következésképpen a H hiperbola $x'Oy'$ rendszerbeli egyenlete:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{u}{p}x' + \frac{av}{bq}y'\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{p^2} - \frac{y'^2}{q^2} = 1.$$

Ez utóbbi egyenlet is formálisan megegyezik a hiperbola kanonikus egyenletével. Ez sem meglepő, mivel a kanonikus egyenletet itt is sajátos esetként kapjuk, éspedig ha V egybeesik az $(a, 0)$ csúcsponttal (a hiperbola szimmetriatengelyei egymásra merőleges konjugált irányok). Tehát a hiperbola egyenlete a konjugált irányok ferdeszögű koordinátarendszerében

$$\frac{x'^2}{p^2} - \frac{y'^2}{q^2} = 1 \tag{11}$$

alakú, ahol $2p$ és $2q$ a konjugált átmérők hosszai.

A parabola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében

Tekintsük a d vezéregyenesű, F fókuszpontú parabolát, amelynek kanonikus egyenlete $y^2 = 2px$, ahol p a parabola paramétere. Legyen $O'\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$ a

parabola tetszőleges pontja ($m \neq 0$). Mivel az O' pontban a parabola e érintőjének egyenlete $y = mx + \dfrac{p}{2m}$, az m ennek az érintőnek az iránytényezője, azaz $m = \operatorname{tg}\alpha$, ahol α az e egyenes és Ox tengely hajlásszöge. Az e érintőirány konjugált iránya az O' ponton átmenő, a parabola tengelyével (Ox) párhuzamos a egyenes. Válasszuk az a és e egyeneseket az $x'O'y'$ ferdeszögű koordinátarendszer tengelyeiként (legyen a az abszcissza-, e pedig az ordinátatengely).

Ha egy tetszőleges P pont xOy rendszerbeli koordinátái (x, y), $x'O'y'$ rendszerbeli koordinátái pedig (x', y'), akkor

$$x = x' + y'\cos\alpha + \frac{p}{2m^2} \tag{12}$$

és

$$y = y'\sin\alpha + \frac{p}{m}. \tag{13}$$

Tehát a parabola $x'O'y'$ rendszerbeli egyenlete:

$$\left(y'\sin\alpha + \frac{p}{m}\right)^2 = 2p\left(x' + y'\cos\alpha + \frac{p}{2m^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'^2\sin^2\alpha = 2px' \Leftrightarrow y'^2 = 2\left(p + \frac{p}{m^2}\right)x'.$$

A $\lambda = \dfrac{p}{\sin^2\alpha} = p + \dfrac{p}{m^2}$ jelöléssel a parabola $x'O'y'$ rendszerbeli egyenlete

$$y'^2 = 2\lambda x', \tag{14}$$

amely formailag azonos a parabola kanonikus egyenletével. Nevezzük a λ-t az *O' ponthoz tartozó paraméternek.*

Mi most a λ paraméter mértani jelentése? Legyen $M \equiv a \cap Oy$ és $A \equiv a \cap d$: $\lambda = p + 2MO' = 2(AM + MO') = 2AO'$. Tehát λ az O' pont d vezéregyenestől való távolságának a kétszerese ($\lambda \geq p$). Ha $F' \in a$, $O' \in [AF']$ és $AF' = 2AO'$, akkor λ az F' pontnak a d vezéregyenestől való távolsága. Nevezzük az F' pontot *pszeudofókuszpontnak.*

A (12) és (13) képletek alapján a parabola F fókuszpontjának az $x'O'y'$ rendszerbeli koordinátái $(\lambda/2, -\lambda\cos\alpha)$, az F' pont koordinátái pedig $(\lambda/2, 0)$. Következésképpen $FF' \parallel e$. Mivel $A(-\lambda/2, 0)$, az $\overrightarrow{AF}$ vektor $x'O'y'$ rendszerbeli koordinátái $(\lambda, -\lambda\cos\alpha)$, ezért AF merőleges FF'-re.

Megjegyzések. *1. Az e érintő és az AF egyenes N metszéspontja egybeesik az OM szakasz felezőpontjával.*

2. Ha az O' pont leírja a parabolát, az F' pszeudofókuszpont az $y^2 = p\left(x - \dfrac{p}{2}\right)$ egyenletű parabolán mozog, amelynek csúcspontja az eredeti parabola F fókuszpontjába esik.

3. A (8), (11) és (14) egyenleteket nevezzük a kúpszeletek konjugált irányokra vonatkoztatott vagy egyszerűen konjugált egyenleteinek.

A hiperbola egyenlete aszimptotáinak koordinátarendszerében

Válasszuk most a H hiperbola aszimptotáit egy $x'Oy'$ koordinátarendszer tengelyeiként. Ha az aszimptoták egységvektorai $\vec{e}_1$ és $\vec{e}_2$, az általuk alkotott szöget pedig 2φ jelöli, akkor $\vec{e}_1 = \cos\varphi\cdot\vec{\imath} - \sin\varphi\cdot\vec{\jmath}$ és $\vec{e}_2 = \cos\varphi\cdot\vec{\imath} + \sin\varphi\cdot\vec{\jmath}$. Mivel $\sin\varphi = \dfrac{b}{c}$ és $\cos\varphi = \dfrac{a}{c}$, az $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ortonormált bázisról az $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ „*aszimptotikus*" bázisra való áttérési mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Ha egy tetszőleges P pont xOy rendszerbeli koordinátái (x, y), $x'Oy'$ rendszerbeli koordinátái pedig (x', y'), akkor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

következésképpen

$$x = \frac{a}{c}(x' + y') \tag{15}$$

és

$$y = \frac{b}{c}(-x' + y'). \tag{16}$$

Tehát a hiperbola egyenlete az aszimptotákból álló $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerben:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}(x'+y')^2 - \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}(-x'+y')^2 = 1 \Leftrightarrow (x'+y')^2 - (-x'+y')^2 = c^2 \Leftrightarrow x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Összefüggések az ellipszis és a hiperbola elemei között

A továbbiakban összefüggéseket állapítunk meg az ellipszis ill. hiperbola a, b, c, p, q és θ elemei között, ahol θ a konjugált irányok hajlásszögét jelöli, az $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ pedig a konjugált irányok $x'Oy'$ koordinátarendszerének normált bázisa :

ellipszis

1. $p^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$

$q^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$

$\Rightarrow p^2 + q^2 = a^2 + b^2$

$p^2 - q^2 = c^2\cos 2t,$

$t \in [0, 2\pi)$

hiperbola

1. $p^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t}\left(a^2 + b^2\sin^2 t\right)$

$q^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t}\left(a^2\sin^2 t + b^2\right)$

$\Rightarrow p^2 - q^2 = a^2 - b^2$

$p^2 + q^2 = c^2(1 + 2\mathrm{tg}^2\, t),$

$t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

ellipszis

2. $\cos\theta = \vec{e}_1\vec{e}_2 = \dfrac{1}{pq}\overrightarrow{OV}\cdot\overrightarrow{OW} =$

$$= \frac{1}{pq}\Big(-a^2\sin t\cos t + b^2\sin t\cos t\Big) =$$

$$= \frac{1}{2pq}\Big(b^2 - a^2\Big)\sin 2t = -\frac{c^2\sin 2t}{2pq},$$

$$t \in [0, 2\pi)$$

3. $T_{OVW} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t & b\cos t \end{vmatrix} = \dfrac{ab}{2} =$

$$= \frac{1}{2}pq\sin\theta \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{ab}{pq}$$

hiperbola

2. $\cos\theta = \vec{e}_1\vec{e}_2 = \dfrac{1}{pq}\overrightarrow{OV}\cdot\overrightarrow{OW} =$

$$= \frac{1}{pq\cos^2 t}\Big(a^2\sin t + b^2\sin t\Big)$$

$$= \frac{1}{2pq\cos^3 t}(b^2 + a^2)\sin 2t = \frac{c^2\sin 2t}{2pq\cos^3 t},$$

$$t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

3. $T_{OVW} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{a}{\cos t} & b\operatorname{tg} t \\ a\operatorname{tg} t & \dfrac{b}{\cos t} \end{vmatrix} = \dfrac{ab}{2} =$

$$= \frac{1}{2}pq\sin\theta \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{ab}{pq}$$

Az 1. és 3. alatti képletek Apollóniosz ellipszisre vonatkozó tételeit fejezik ki: az átmérők megválasztásától függetlenül az ellipszis konjugált félátmérőinek négyzetösszege $a^2 + b^2$, ill. az általuk meghatározott háromszög területe $\dfrac{ab}{2}$. Hasonló megállapítások a hiperbolára is érvényesek, csak ott négyzetösszeg helyett négyzetkülönbséget kell venni.

A kúpszeletek érintőjének egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében

1. Ellipszis ♦ Legyen M_0 az ellipszis tetszőleges pontja, (x_0, y_0) az M_0 pont koordinátái az xOy derékszögű, (x_0', y_0') pedig a konjugált irányok $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerében. Az M_0 pontbeli d érintő egyenlete az xOy rendszerben $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$. A (6) és (7) képletek alapján a d érintő egyenlete az $x'Oy'$ rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{u}{p}x_0' - \frac{av}{bq}y_0'\right)\left(\frac{u}{p}x' - \frac{av}{bq}y'\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{v}{p}x_0' + \frac{bu}{aq}y_0'\right)\left(\frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'\right) = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\frac{x_0'x'}{p^2} + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\frac{y_0'y'}{q^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{x_0'x'}{p^2} + \frac{y_0'y'}{q^2} = 1.$$

2. Hiperbola ♦ Legyen M_0 a hiperbola tetszőleges pontja, (x_0, y_0) az M_0 pont koordinátái az xOy derékszögű, (x_0', y_0') pedig a konjugált irányok $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerében. Az M_0 pontbeli d érintő egyenlete az xOy rendszerben $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$. A (9) és (10) képletek alapján a d érintő egyenlete az $x'Oy'$ rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{u}{p}x_0' + \frac{av}{bq}y_0'\right)\left(\frac{u}{p}x' + \frac{av}{bq}y'\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{v}{p}x_0' + \frac{bu}{aq}y_0'\right)\left(\frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'\right) = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)\frac{x_0'x'}{p^2}-\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)\frac{y_0'y'}{q^2} \Leftrightarrow \frac{x_0'x'}{p^2}-\frac{y_0'y'}{q^2}=1.$$

3. Parabola ♦ Legyen M_0 a parabola tetszőleges pontja, (x_0, y_0) az M_0 pont koordinátái az xOy derékszögű, (x_0', y_0') pedig a konjugált irányok $x'O'y'$ ferdeszögű koordinátarendszerében. Az M_0 pontbeli d érintő egyenlete az xOy rendszerben $y_0y = p(x + x_0)$. A (12) és (13) képletek alapján a d érintő egyenlete az $x'O'y'$ rendszerben a következő lesz:

$$\left(y_0'\sin\alpha+\frac{p}{m}\right)\left(y'\sin\alpha+\frac{p}{m}\right)=p\left(x'+y'\cos\alpha+\frac{p}{2m^2}+x_0'+y_0'\cos\alpha+\frac{p}{2m^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ y_0'y'\sin^2\alpha+\frac{p}{m}y_0'\sin\alpha+\frac{p}{m}y'\sin\alpha+\frac{p^2}{2m^2}=p(x'+x_0')+p(y'+y_0')\cos\alpha+\frac{p^2}{2m^2}$$

$$\Leftrightarrow\ y_0'y'\frac{p}{\lambda}+\frac{p}{m}y_0'\sin\alpha+\frac{p}{m}y'\sin\alpha=p(x'+x_0')+p(y'+y_0')\cos\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y_0'y'=\lambda(x'+x_0').$$

Tehát megállapíthatjuk, hogy a konjugált irányok koordinátarendszerében a kúpszeletek adott pontbeli érintőjének egyenletét szintén az ún. *duplázási eljárással* kapjuk, mint a derékszögű koordinátarendszerek esetében.

A hiperbola érintőjének egyenlete az aszimptoták koordinátarendszerében

Legyen M_0 a hiperbola tetszőleges pontja, (x_0, y_0) az M_0 pont koordinátái az xOy derékszögű, (x_0', y_0') pedig az aszimptoták $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerében. Az M_0 pontbeli d érintő egyenlete az xOy rendszerben $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. A (15) és (16) képletek alapján a d érintő egyenlete az $x'Oy'$ rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{c}\left(x_0'+y_0'\right)\cdot\frac{a}{c}\left(x'+y'\right)-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{c}\left(-x_0'+y_0'\right)\cdot\frac{b}{c}\left(-x'+y'\right)=1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y_0'x'+x_0'y'=\frac{c^2}{2}.$$

Tehát az érintő egyenletét ebben az esetben is duplázással kapjuk, éspedig úgy, hogy a hiperbola $x'y'=\frac{c^2}{4}$ egyenletét $x'y'+x'y'=\frac{c^2}{2}$ alakba írjuk, majd a bal oldal egyik tagjában x'-et x_0'-val, a másik tagjában y'-et y_0'-val helyettesítjük.

Alkalmazások

Ebben a részben azt mutatjuk meg, hogy a kúpszeletekkel kapcsolatos tulajdonságok, feladatok bizonyítása sok esteben lényegesen egyszerűsíthető, ha a bizonyítás során valamely ferdeszögű koordinátarendszerben felírt egyenletüket használjuk.

1. *Igazoljuk, hogy az ellipszis (hiperbola) adott pontbeli érintője párhuzamos az ehhez a ponthoz tartozó átmérő konjugált átmérőjével.*

Bizonyítás. Ha VV' és WW' az ellipszis (hiperbola) konjugált átmérői, akkor a konjugált irányok $x'Oy'$ koordinátarendszerében a $V(p,0)$ pontbeli d érintő egyenlete $\dfrac{p\cdot x'}{p^2}\pm\dfrac{0\cdot y'}{q^2}=1 \Leftrightarrow x'=p$, azaz $d \parallel OW$. ■

2. *Írjunk az E ellipszisbe egy olyan $M_1M_2M_3$ háromszöget, amelynek súlypontja egybeesik az ellipszis középpontjával. Igazoljuk, hogy az ellipszis M_1, M_2, M_3 pontjaihoz tartozó normálisai egy ponton mennek át.*

Bizonyítás. Ezzel a feladattal kapcsolatban több nehézség is felmerül. Pl. hogyan írjunk az ellipszisbe egy olyan háromszöget, amely a feltételeket teljesíti? Egyáltalán létezik-e ilyen háromszög? Először a feladat feltételeit kielégítő $M_1M_2M_3$ háromszög létezését bizonyítjuk.

A $V\equiv M_1\in E$ ponthoz tartozó VV' átmérő konjugált átmérője legyen WW'. A VV' átmérő a WW'-vel párhuzamos húrok felezőpontjainak mértani helye. Ha S az OV' szakasz felezőpontja, akkor az S ponton átmenő d egyenes az E ellipszist az M_2, M_3 pontokban metszi. Mivel $OV=2\cdot OS$, az M_1S szakasz akkor és csak akkor lesz az $M_1M_2M_3$ háromszög súlyvonala, ha az S pont az M_2M_3 szakaszt is felezi, azaz ha $M_2M_3 \parallel WW'$. Ebben az esetben pedig az $M_1M_2M_3$ háromszög G súlypontja egybeesik O-val, az ellipszis centrumával.

Az M_i ellipszisponthoz tartozó érintőt jelölje d_i, $i=1,2,3$. Az 1. tulajdonság alapján $d_1 \parallel M_2M_3$, $d_2 \parallel M_3M_1$, $d_3 \parallel M_1M_2$. Tehát az M_i pontokbeli normálisok az $M_1M_2M_3$ háromszög magasságvonalai lesznek, ezek pedig egy pontban metszik egymást. (A 2. feladat más megoldásai megtalálhatók [3]-ban.) ■

3. A hiperbola V pontbeli érintőjéből az aszimptoták által kivágott MN szakaszt a V pont felezi.

Bizonyítás. A $V(u,v)$ pontbeli d érintő egyenlete az aszimptoták $x'Oy'$ ferdeszögű koordinátarendszerében $vx'+uy'=\dfrac{c^2}{2}$. Ha d az aszimptotákat az M ill. N pontban metszi, akkor $M\left(\dfrac{c^2}{2v},0\right)$ és $N\left(0,\dfrac{c^2}{2u}\right)$. Mivel $uv=\dfrac{c^2}{4} \Leftrightarrow u=\dfrac{c^2}{4v} \Leftrightarrow v=\dfrac{c^2}{4u}$, a V pont az MN szakasz felezőpontja. ■

4. A hiperbola bármely érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe ab, azaz állandó.

Bizonyítás. Ha a d érintő az aszimptotákat az M illetve N pontban metszi, akkor $M\left(\frac{c^2}{2v},0\right)$ és $N\left(0,\frac{c^2}{2u}\right)$. Tehát $T_{OMN} = |OM|\cdot|ON|\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\left|\frac{c^2}{2v}\right|\cdot\left|\frac{c^2}{2u}\right|\sin 2\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi = ab.$ ■

Megjegyzés. A 3. és 4. tulajdonságok egyik következménye, hogy a V hiperbola-ponton át az aszimptotákkal párhuzamosan húzott egyenesek az aszimptotákkal egy, szintén állandó területű, $OKVL$ paralelogrammát képeznek: $T_{OKVL} = \frac{1}{2}T_{OMN} = \frac{1}{2}ab.$

5. A hiperbola valamely aszimptotájával párhuzamos egyenes a hiperbolát egyetlen pontban metszi.

Bizonyítás. Ha a d egyenes párhuzamos az Oy' tengellyel (aszimptotával), akkor egyenlete $x' = u \Rightarrow y' = \frac{c^2}{4u}$. Tehát d a hiperbolát egyetlen pontban metszi. Ha a d egyenes párhuzamos az Ox' tengellyel (aszimptotával), akkor egyenlete $y' = v \Rightarrow x' = \frac{c^2}{4v}$. Tehát d a hiperbolát szintén egyetlen pontban metszi. ■

6. Ha egy d egyenes a hiperbolát két pontban metszi, akkor a d-nek az aszimptoták és a hiperbola ágai közé eső szakaszai egyenlők.

Bizonyítás. A d egyenesnek az Ox' tengellyel (aszimptotával) való metszéspontja legyen M, az Oy' tengellyel (aszimptotával) pedig N. Messe a d egyenes a hiperbolát a T és S pontokban (T legyen közelebb M-hez, S pedig az N-hez). Ha $T(\alpha,\beta)$ és $S(u,v)$, akkor az 5. tulajdonság alapján $\alpha \neq u$, $\beta \neq v$, és $\alpha\beta = \frac{c^2}{4} = uv$. A d egyenes iránytényezője $m = \frac{\beta - v}{\alpha - u} \Leftrightarrow \beta - m\alpha = v - mu$, tehát egyenlete $y' - \beta = m(x' - \alpha)$. Meghatározzuk az M és N pontok koordinátáit:

$$y' = 0 \Rightarrow x' - \alpha = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow x' = \alpha - \frac{\beta}{m} \Rightarrow M\left(\alpha - \frac{\beta}{m}, 0\right)$$

$x' = 0 \Rightarrow y' - \beta = -m\alpha \Rightarrow y' = \beta - ma \Rightarrow N(0,\beta - m\alpha)$ vagy $N(0, v - mu)$

Kiszámítjuk a TM és SN szakaszok hosszát:

$$TM^2 = \frac{\beta^2}{m^2} + m^2 + 2\frac{\beta^2}{m}\cos 2\varphi = \frac{\beta^2}{m^2}\left(m^2 + 2m\cos 2\varphi + 1\right),$$

$$SN^2 = u^2 + m^2u^2 + 2mu^2\cos 2\varphi = u^2\left(m^2 + 2m\cos 2\varphi + 1\right).$$

Mivel $TM^2 = SN^2 \Leftrightarrow \beta^2 = m^2u^2 \Leftrightarrow \beta^2(\alpha - u)^2 = u^2(\beta - v)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{c^2}{4} - u\beta\right)^2 = \left(u\beta - \frac{c^2}{4}\right)^2$, és ez utóbbi egyenlőség igaz, ezért $TM = SN$. ■

Most Arkhimédész két, parabolával kapcsolatos, tételét bizonyítjuk. A parabola két érintője és az érintési pontokat összekötő szelő által meghatározott háromszöget Arkhimédész-féle háromszögnek nevezzük. A szelőre illeszkedő oldalt a háromszög alapjának hívjuk.

7. Az Arkhimédész-féle háromszög alapjához tartozó súlyvonal párhuzamos a parabola tengelyével.

Bizonyítás. Az A és B parabolapontokhoz tartozó érintők metszéspontja legyen C, az ABC háromszög AB alapjának felezőpontja pedig Q. Válasszuk vonatkoztatási rendszerként az A ponthoz tartozó konjugált irányokat. Ebben a ferdeszögű koordinátarendszerben a parabola egyenlete $y'^2 = 2\lambda x'$, ahol λ az A ponthoz tartozó paraméter. Ha a B pont koordinátái (u, v), akkor $v^2 = 2\lambda u$ és $Q\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$. Meghatározzuk a C pont ordinátáját. A B pontbeli érintő egyenlete $vy = \lambda(x + u)$. Ez az érintő az ordinátatengelyt (az A pontbeli érintőt) a $\frac{\lambda u}{v}$ ordinátájú pontban metszi, azaz $C\left(0, \frac{\lambda u}{v}\right)$ vagy $C\left(0, \frac{v}{2}\right)$. A C és Q pontok ordinátái egyenlők, ezért a CQ súlyvonal párhuzamos a parabola tengelyével. ■

8. Az ABC Arkhimédész-féle háromszög AB alapjával párhuzamos MN középvonalnak ($M \in BC, N \in AC$) a CQ súlyvonallal való P metszéspontja rajta van a parabolán és a P ponthoz tartozó érintő éppen az MN egyenes.

Bizonyítás. Mivel P a CQ szakasz felezőpontja, ezért $P\left(\frac{u}{4}, \frac{v}{2}\right)$. A P pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét, következésképpen P rajta van a parabolán.

A P pontbeli d érintő egyenlete: $4vx - 4uy + uv = 0$. Mivel $M\left(\frac{u}{2}, \frac{3v}{4}\right)$, $N\left(0, \frac{v}{4}\right)$ az MN egyenes egyenlete szintén $4vx - 4uy + uv = 0$, azaz $d \equiv MN$. ■

Könyvészet

1. Radó Ferenc–Orbán Béla, A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.

2. Kiss Sándor, *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal*, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 1999.

3. Kiss Sándor, *A merőleges affinitás és néhány alkalmazása*, MatLap, V. évf., 2001. november, 9. szám, 330-334 old.

Az excentrikus anomália meghatározása mesterséges neuronháló segítségével*

Makó Zoltán
BBTE Kolozsvár, Matematikai és Informatikai Kar
Email: zmako@math.ubbcluj.ro
Sapientia EMTE, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Csíkszereda
Email: makozoltan@sapientia.siculorum.ro

Szenkovits Ferenc
BBTE Kolozsvár, Matematikai és Informatikai Kar
Email: fszenko@math.ubbcluj.ro

Garda-Mátyás Edit
Sapientia EMTE, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Csíkszereda
Email: matyasedit@sapientia.siculorum.ro

1. Bevezetés

A Kepler-egyenlet a kéttest-probléma egyik alapvető összefüggése. Alkalmazva ezt az egyenletet (1), meghatározhatjuk egy bolygó pályamenti helyzetét egy adott t időpontban:

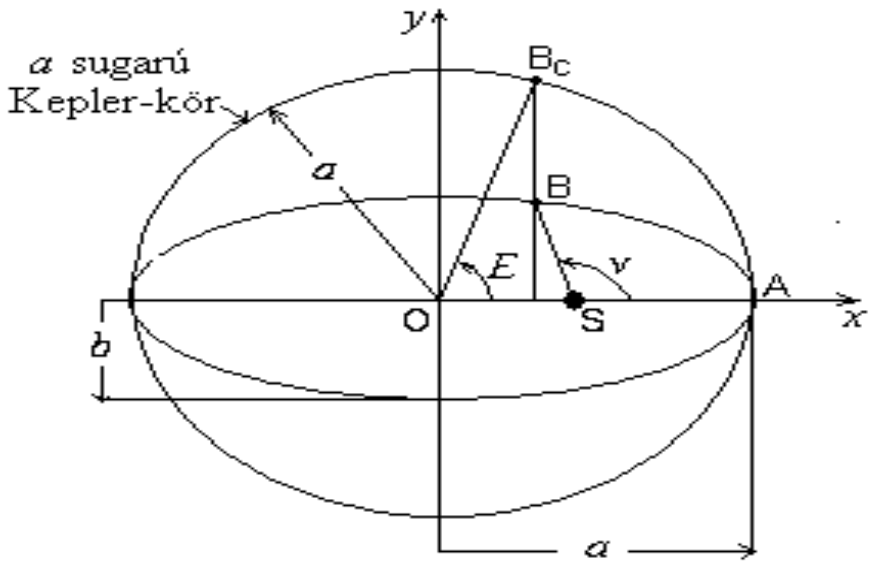
$$E - e \sin E = M, \tag{1}$$

ahol $E = E(t)$ az *excentrikus anomália* a Kepler-körön levő B_c pont poláris szöge, $0 \leq e < 1$ a pálya *excentricitása*, $M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau)$ a *középanomália*, P a bolygó *keringési periódusa* ("év"), τ a *perihélium-átmenet időpontja* (1. ábra). A Kepler-egyenlet a második Kepler-tövényből vezethető le, amely kimondja, hogy a bolygó vezérsugara az idővel arányos területeket súrol. A B_c pont helyzetét az $(a \cos E, b \sin E)$ koordináták adják meg, ahol a és b a fél nagytengely, illetve a fél kistengely. Ezek közötti összefüggés: $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Ha M nem többszöröse a π-nek, akkor az (1) Kepler-egyenletnek egyetlen megoldása van. A Kepler-egynlet azonban transzcendens, így E-t az M függvényeként explicit formában megadni nem lehet. Ennek következménye az, hogy a kéttest-probléma elliptikus esetének az idő függvényeként explicit alakú megoldása nem létezik. Ez sok nehézséget okoz, különösen a perturbációszámításban. Megadhatók azonban a Kepler-egyenlet közelítő megoldásai, alkalmazva például a Newton-féle iterációs módszert, Fourier-sorokat, Csebisev-sorokat, Bessel-függvényeket, stb (Colwell, 1993).

Egy bolygó valós pozícióját azonban nem adja meg a Kepler-egyenlet megoldása, mivel a bolygóra a Nap tömegvonzásán kívül egy egész sor más

*Ezt a kutatást a Sapientia Kutatási Programok Intézete az 1354/2004 szerződés keretében finanszírozta.



1. ábra: A bolygó elliptikus mozgása

perturbációs erő is hat, amit nem modellez a kéttest-probléma. A Kepler-egyenlet által megadott valamint a perturbációk figyelembe vételével számított excentrikus anomália közötti eltérést a 2004-es évre a 2 ábra szemlélteti.

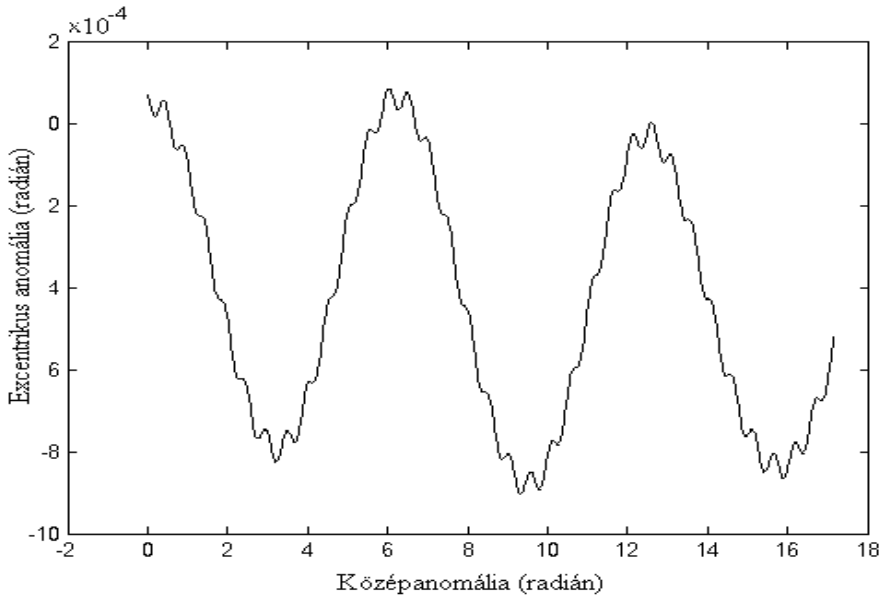
Ha a perturbációkat is beépítjük a kéttest-problémába (perturbált kéttest-probléma), akkor a perturbált Kepler-egyenlethez jutunk. Ez az egyenlet a Lagrange-féle perturbációszámítás egyenleteiből nagyon bonyolult számításokkal vezethető le (Érdi, 2001).

A mesterséges neuronhálókat sikeresen lehet alkalmazni függvényapproximációra. A legtöbb esetben hiba-visszaterjesztési algoritmussal működő neuronhálókat használnak erre a célra. Ha a perturbált Kepler-egyenletet úgy tekintjük mint perturbációs zajokkal módosított Kepler-egyenletet, akkor a megoldás megközelíthető előrecsatolt mesterséges neuronhálók segítségével.

Ebben a dolgozatban bemutatunk egy olyan 2–8–4–1 típusú többrétegű neuronhálót, amely tanítás után a bolygó radiánba mért valódi helyzetének egy tizeddel jobb megközelítését adja, mint a Kepler-egyenlet. A tanítás után kapott súlyok indirekt módon jellemzik a perturbációs hatásokat és segítségükkel az excentrikus anomáliára egy explicit képlet adható.

2. A mesterséges neuronhálók rövid bemutatása

A neuronháló kapcsolatokkal összekötött csomópontokból (neuronokból) vagy más néven processzáló egységekből épül fel. Mindegyik kapcsolathoz tartozik egy hozzárendelt numerikus érték ($W_{k,i}$), súly. A súlyok a hosszú



2. ábra: A valódi és a Kepler-egyenlettel számított excentrikus anomáliák közti eltérés

távú információtárolás eszközei a neuronhálóban, a tanulás általában a súlyok megfelelő módosításával történik. Néhány csomópont a külső környezethez kapcsolódik, és bemeneti vagy kimeneti egységként szolgál. A súlyokat úgy módosítjuk, hogy a hálózat bemeneti/kimeneti viselkedése összhangba kerüljön a bemeneti adatokat szolgáltató külső környezettel.

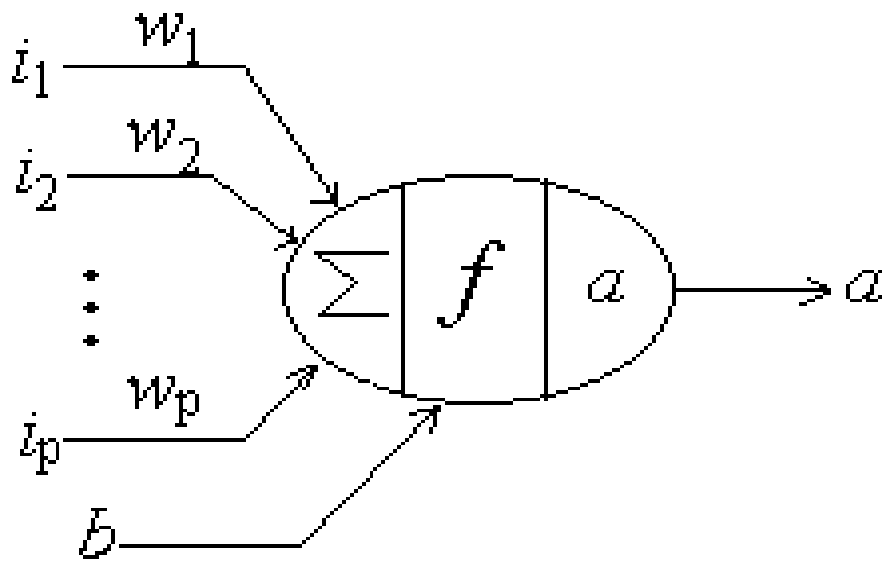
A neuron

A 3. ábra egy tipikus neuront mutat. Minden egyes neuron egy rendkívül egyszerű számítást végez: jeleket fogad a bemeneti kapcsolatain keresztül, kiszámít egy új aktivációs (a) értéket, és ezt továbbküldi a kimeneti kapcsolatain keresztül.

A számítás két lépésben történik. Az első egy lineáris, amelyet bemeneti függvénynek (input function) nevezzük (in), ez az egységhez érkező bemeneti értékek súlyozott összegének kiszámítását jelenti: $in = \sum_{k=1}^{p} w_k i_k + b = \sum_{k=0}^{p} w_k i_k$, ahol $i_0 = 1$ és $b = w_0$ a neuron aktivációs súlya.

A második számítási lépés nemlineáris, ezt aktivációs függvénynek (activation function) nevezzük (f). Ez a nemlineáris függvény a súlyozott összeget azzá a végső értékké alakítja, ami az egység aktivációs értékét adja: $a = f(in)$.

Az elemi számítási lépés során kiszámítjuk minden egyes egység új aktivációs értékét oly módon, hogy a bemeneti függvény eredményeként kapott értékre alkalmazzuk az f aktivációs függvényt. Ha az f-nek különböző ma-



3. ábra: A neuron

tematikai függvényeket használunk, akkor eltérő neuronhálós modellekhez jutunk.

Elõrecsatolt többrétegû neuronhálók

Nagyon sokféle hálózati struktúra létezik, amelyek nagyon eltérő számítási tulajdonságokat eredményeznek. A legfontosabb két osztály: előrecsatolt (feed-forward) és a visszacsatolt (recurent) hálók. Az előrecsatolt hálóban a kapcsolatok egyirányúak, és nincs hurok a hálóban. A visszacsatolt hálóban a kapcsolatok által kialakított topológia tetszőleges. Mi az excentrikus anomália meghatározására előrecsatolt többrétegű hálót használunk.

Rosenblatt és társai (Rosenblatt, 1957) leírták ugyan a többrétegű hálókat az 1950-es évek végén, de kutatásaikat az egyrétegű perceptronokra koncentrálták. Ennek fő oka az volt, hogy nehéz volt ésszerű súlymódosítási szabályt találni a bemenet és a rejtett egységek közötti súlyokra. Amíg ugyanis a kimeneti egységekre a hibajel könnyen számítható, nem világos, hogy a rejtett egységre mi kellene, hogy legyen a hibajel.

A többrétegű hálók legnépszerűbb tanulási módszere a hiba-visszaterjesztés (back-propagation). Ezt először Bryson és Ho (Bryson, 1969) alkalmazta, de az 1980-as évek közepéig többé-kevésbé figyelmen kívül hagyták.

A többrétegű hálók tanítása a következő szabály szerint történik:

Példabemeneteket mutatunk a hálónak, és ha a háló által kiszámított kimeneti paraméter megegyezik a kívánt kimenettel, akkor nem teszünk sem-

mit. Ha a kívánt érték és a kimenet között eltérés van (ez a hiba), akkor a súlyokat úgy módosítjuk, hogy a hiba csökkenjen.

A feladat nehézsége a hiba megállapításában és súlyok közti szétosztásában rejlik. A hiba-visszaterjesztési algoritmus lényege, hogy a hibát úgy osztja szét a súlyok között, hogy figyelembe veszi a súlyok kimenetelre gyakorolt hatását.

Ha a kimeneti egység becsült értéke O_i , a helyes kimeneti érték pedig T_i, akkor a hiba

$$Err_i = T_i - O_i.$$

A j-edik egységtől az i-edik egység felé mutató súly módosításának szabálya:

$$W_{j,i} := W_{j,i} + c \cdot a_j \cdot Err_i \cdot g\prime(in_i),$$

ahol a $g\prime$ a g aktivációs függvény deriváltja, c pedig a bátorsági faktornak vagy a tanulási tényezőnek (learning rate) nevezett állandó.

A rejtett rétegek közötti súlyok módosítási szabálya szinte azonos, mint a kimeneti réteg súlyainak módosítási szabálya:

$$\bar{W}_{k,j} := \bar{W}_{k,j} + c \cdot I_k \cdot g\prime(in_j) \cdot \sum_i \left[W_{j,i} \cdot Err_i \cdot g\prime(in_i)\right].$$

A hiba-visszaterjesztés algoritmusa

Az előrecsatolt többrétegű hálók legnépszerűbb tanítási eljárásának, a hiba-visszaterjesztési algoritmusának a pszeudokódja (Russell-Norvig, 2000):

Function HIBA-VISSZATERJESZTÉS (háló, példák, c),
  inputs: többrétegű háló,
  példák- bemeneti-kimeneti adatpárok halmaza $\{(\boldsymbol{I}_\mathbf{e}, \boldsymbol{T}_\mathbf{e}\ )/\ e \in E\ \}$
  c- bátorsági faktor
  epoch = 0
  repeat
    epoch++
    for each e **in** E **do**
    /* A kimeneti érték kiszámítása az I_e példára */
      $\boldsymbol{O}$: = HÁLÓÉRTÉK (háló, I_e)
      /* A hiba kiszámítása */
      $\boldsymbol{Err}$: = $\boldsymbol{T}_\mathbf{e} - O$
      /* A kimeneti réteghez tartozó súlyok kiszámítása */
      $W_{j,i} := W_{j,i} + c \cdot a_j \cdot Err_i \cdot g\prime(in_i)$,
      for each megelőző rétegre **in** háló **do**
        $\bar{W}_{k,j} := \bar{W}_{k,j} + c \cdot I_k \cdot g\prime(in_j) \cdot \sum_i \left[W_{j,i} \cdot Err_i \cdot g\prime(in_i)\right]$
      end
    end

until a háló konvergál vagy epoch $\leq$ maxepoch
return háló, módosított súlyokkal

A hiba-visszaterjesztési algoritmus súlyképleteit úgy kapjuk meg, hogy a példák által kapott hibafüggvényt (hibák négyzetösszegét):

$$E\left(\bar{W}, W\right) = \frac{1}{N} \sum_i \left[T_i - g\left(\sum_j W_{j,i} g\left(\sum_k \bar{W}_{k,j} I_k \right) \right) \right]^2$$

egy gradiens alapú kereséssel minimizáljuk, ahol N a kimeneti egységek száma. A neuronháló teljesítménye (performance) a hibafüggvény minimális értékével egyezik meg.

Ha a hibafüggvény az előző képlettel van megadva, akkor előfordulhat, hogy a tanítás során egy bizonyos példahalmazra a hiba egy bizonyos kis értékhez konvergál, de ha újabb példákat viszünk be a példahalmazba, akkor a hiba hirtelen megugrik. Ezt a jelenséget hívják a neuronháló felülillesztésének (overfitting). Ez általában annak köszönhető, hogy a súlyok viszonylag nagyok. A neuronháló teljesítménye növelhető, ha a tanítást kis súlyokkal végezzük. A regularizálás módszerével a súlyok nagyságát egy bizonyos korlát alatt tudjuk tartani.

Legyen $\lambda \in (0, 1)$ a teljesítményi arány. Módosítjuk a hibafüggvényt az alábbiak szerint:

$$F(\bar{W}, W) = \lambda \cdot E(\bar{W}, W) + (1 - \lambda) \cdot S(\bar{W}, W), \tag{2}$$

ahol

$$S(\bar{W}, W) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j,i} W_{j,i}^2 + \sum_{k,j}^{2} \bar{W}_{k,j} \right) \tag{3}$$

a súlyok négyzeteinek számtani középarányosa és n a súlyok száma.

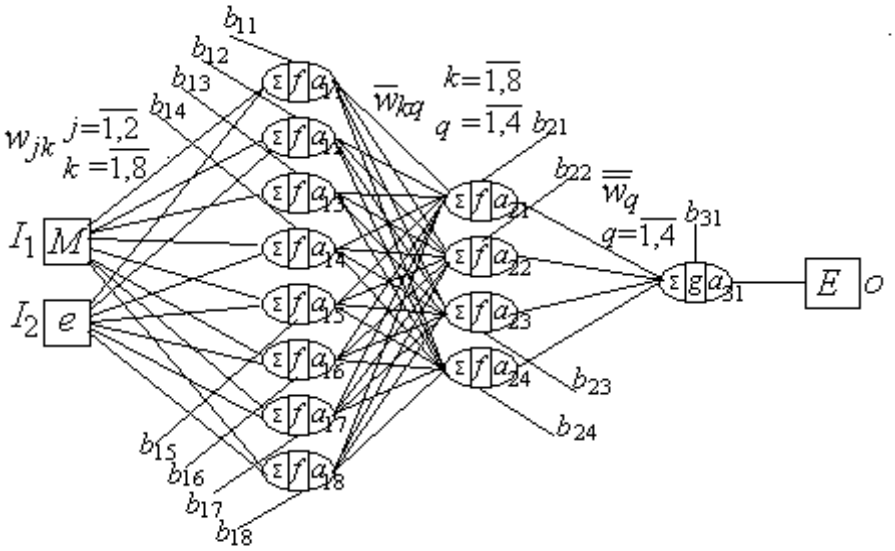
Ha a tanítás során arra törekszünk, hogy ezt a módosított hibafüggvényt minimizáljuk, akkor ez arra kényszeríti a súlyokat, hogy minél kisebbek legyenek.

Ezt a hibafüggvényt használjuk a következő részben a perturbált Kepler-egyenlet megoldásának megfelelő excentrikus anomália meghatározására.

3. Neuronhálónk felépítése és tanítása

Az általunk használt neuronháló felépítését a 4. ábra mutatja be. Ez a háló három rétegű. A súlyokat a bemeneti és az első réteg a_{1k} neuronjai között w_{jk} -val jelöltük, $j = \overline{1,2}$ és $k = \overline{1,8}$. Az első réteg a_{1k} és a második réteg a_{2q} neuronjai közötti súlyokat $\overline{w}_{kq}$ jelöli, $k = \overline{1,8}$ és $q = \overline{1,4}$. A második réteg a_{2q} és a harmadik réteg a_{31} neuronjai közötti súlyokat $\overline{\overline{w}}_q$ jelöli, ahol

$q = \overline{1,4}$. Az a_{ts} neuron aktivációs súlyait b_{ts} jelöli. A háló aktivációs függvényei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahol $f(x) = \tanh x$ valamint $g(x) = x$, bármely $x \in \mathbb{R}$.



4. ábra: A neuronháló szerkezete

A (4) neuronháló kimeneti értékét az

$$o = \sum_{q=1}^{4} \overline{\overline{w}}_q \cdot \tanh \left[\sum_{k=1}^{8} \overline{w}_{kq} \cdot \tanh \left(w_{1k} \cdot M + w_{2k} \cdot e + b_{1k} \right) + b_{2q} \right] + b_{31} \quad (4)$$

képlet adja.

Amint az előző részben már megemlítettük, a neuronhálós modellezés alapötlete, hogy a háló w_{jk} ,$\overline{w}_{kq}, \overline{\overline{w}}_q$ és b_{ts} súlyait úgy állítsuk be, hogy az 4 kimeneti érték a lehető legjobban megközelítse a kívánt értéket, vagyis a hiba a lehető legkisebb legyen. Miután a háló súlyait véletlenszerűen megválasztottuk, a bemeneti és kimeneti tanítópéldák segítségével addig módosítjuk őket, amíg a hiba egy megengedett hibaszint alá kerül. A súlyokat a hiba-visszaterjesztés algoritmusa alapján számítjuk újra. A mi esetünkben a cél az, hogy a Kepler-egyenlet által adott értéknél jobb megközelítését adjuk a $h(M, e) = E$ függvénynek, ahol E az észlelési adatok alapján (vagy nagyon pontos efemerisz táblázatok alapján) kiszámított érték, ha az excentrikus anomália M és a pálya excentricitása e. Ennek érdekében a tanító példák halmaza

$$Pld = \{(M, e, E) \quad / \quad E = h(M, e)\} ,$$

ahol (M, e) a bemeneti érték és E a kívánt kimeneti érték. Továbbiakban a Pld halmaz elemeinek a számát N-el jelöljük. A tanítás során arra törekedünk, hogy az alábbi módosított hibafüggvény a minimumhoz tartson:

$$msereg = \alpha \cdot mse + (1 - \alpha)\, msw. \tag{5}$$

Itt α a teljesítményi arány,

$$mse = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (o_i - E_i)^2 , \tag{6}$$

a hibák négyzeteinek számtani középarányosa és

$$msw = \frac{1}{52} \left(\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{8} w_{jk}^2 + \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{4} \overline{w}_{kq}^2 + \sum_{q=1}^{4} \overline{\overline{w}}_q^2 \right) \tag{7}$$

a súlyok négyzeteinek számtani középarányosa.

A (5) hibafüggvény hatására a súlyok kicsik lesznek és a felülillesztés jelensége sem jelentkezik, de ennek az az ára, hogy a (5) függvény minimumának a megkeresése elbonyolódik. Az optimum megközelítésének az egyik, viszonylag egyszerű módja a David MacKay (MacKay, 1992) által kidolgozott Bayes-féle heurisztikus optimum-keresési eljárás. Az eljárás alapján történő Levenberg-Marquardt-féle tanítási módszer részletes leírása megtalálható a Foresee et al. (1997) cikkben.

4. Eredmények

A Levenberg–Marquardt-féle tanítási eljárást alkalmazzuk a perturbált Kepler-egyenlet megoldásának approximációjára. A célunk az, hogy a tanítás során a (4) hálónak olyan súlyokat találjunk, amelyre az

$$sse = 36 * mse = \sum_{k=1}^{36} (o_i - E_i)^2 , \tag{8}$$

négyzetes hiba kisebb legyen mint 10^{-8}, ahol o_i az (4) képlettel számolt kimeneti érték és E_i a kívánt kimenet, ha a bemenet (M_i, e_i) (lásd az . táblázatot). A 10^{-8} hibaszint elérése azért szükséges, mert a detektált és a Kepler-egyenlettel számolt excentrikus anomáliák közötti különbség 10^{-4} rendű (lásd a 2. grafikont). Következésképpen a (4) neuronháló alkalmazható, ha a teljesítménye legalább 10^{-4} rendű, vagyis az $sse < 10^{-7}$.

A (4) háló szerkezetét kisérletezések során alakítottuk ki. Kiindultunk egy egyrétegű hálóból és azt tapasztaltuk, bárhogy módosítjuk a neuronok számát és aktivációs függvényeit, az sse nem csökken 10^{-7} alá. Ezek után egy

Ssz.	M	e	E
1	0.01320047109312	0.0167	0.01349017067522
2	0.11641501412687	0.0167	0.11841496381058
3	0.28843925251645	0.0167	0.29330040680059
⋮	⋮	⋮	⋮
34	5.79321488098317	0.0167	5.78519067728140
35	5.96523911937275	0.0167	5.95996923939329
36	6.13726335776234	0.0167	6.13481655114303

1. táblázat: Tanítási példák

kétrétegű hálóval probálkoztunk, de így sem tudtunk elérni 10^{-8}-ad rendig. A legvégén kiindultunk egy 2–50–50–1 típusú 3 rétegű hálóból és addig egyszerűsítettük, amíg az *sse* értéke 10^{-7} alatt maradt. Így kaptuk a már bemutatott 2–8–4–1 típusú 3 rétegű neuronhálót (4).

A háló bemeneti és kimeneti értékei

A tanítási példák a Föld 2004-es évi keringési pozícióira vonatkoznak és a DE403 (DE403 – digital planetary ephemerides developed by the Solar System Dynamics Group at JPL - Jet Propulsion Laboratory of NASA) alapján voltak megállapítva. A táblázat az első és az utolsó három példát tartalmazza.

A háló súlyai

2000 iterációra (epoch) volt szükség ahhoz, hogy az *sse* elérje a 10^{-8} rendet ($sse = 1.49329 \cdot 10^{-8}$). Ekkor

$$ssw = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{8} w_{jk}^2 + \sum_{k=1}^{8}\sum_{q=1}^{4} \overline{w}_{kq}^2 + \sum_{q=1}^{4} \overline{\overline{w}}_q^2 = 30.413. \tag{9}$$

Ez a tanítás során az *ssw* minimuma körüli érték. Ha a tanítást folytatjuk, akkor az *sse* valóban csökken, de ekkor az *ssw* viszonylag nagymértékben kimozdul a minimális pozícióból. Következésképpen a háló súlyai nőnek és így a háló általánosítási tulajdonsága csökken, ekkor felléphet a felülillesztés jelensége.

Jó általánosító tulajdonságot és a szükséges pontosságot biztosítják a neuronhálónak az alábbi súlyok:

$$w = \begin{bmatrix} -0.12287122350 & 0.00272233467 \\ -0.15194060682 & -0.00143586092 \\ -0.30434501843 & 0.03494359377 \\ -0.12630643659 & 0.00043816186 \\ -0.49050677968 & 0.00121385732 \\ 0.98033113458 & 0.00151767837 \\ 0.12332874241 & -0.00334427143 \\ -0.13464014528 & 0.00746359813 \end{bmatrix}$$

$$\overline{w}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0.19405119650 & 0.35683816542 & 0.14878765239 & 0.17905986838 \\ -0.10115447536 & 0.28097746608 & 0.30212418745 & 0.10968347764 \\ 1.60416075234 & 0.92096115375 & -0.21327242346 & 1.05419953411 \\ 0.08142019592 & 0.32404888821 & 0.23636843087 & 0.15779575749 \\ -0.18240033770 & 0.33845775568 & 0.21989883154 & 0.07036973701 \\ 0.27948016967 & -0.25278341174 & -0.36805903288 & 0.05613205188 \\ -0.22058374877 & -0.36732359793 & -0.12646298845 & -0.18380526174 \\ 0.38914775836 & 0.45293358580 & 0.00018783029 & 0.22017122817 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{w}} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.96590732680 & -2.13382116615 & -2.07087631160 & -1.52091863159 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = [b_1, b_2, ..., b_8] =$$

$$\begin{bmatrix} 0.16300551643 & -0.08598701521 & 2.09243686676 & 0.02624212266 \\ 0.07268973599 & 0.09088139650 & -0.20025700952 & 0.44692206176 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [b_1, b_2, b_3, b_4] =$$

$$\begin{bmatrix} 0.2553569707 & -0.04687264397 & -0.78459654191 & -0.16606136316 \end{bmatrix}$$

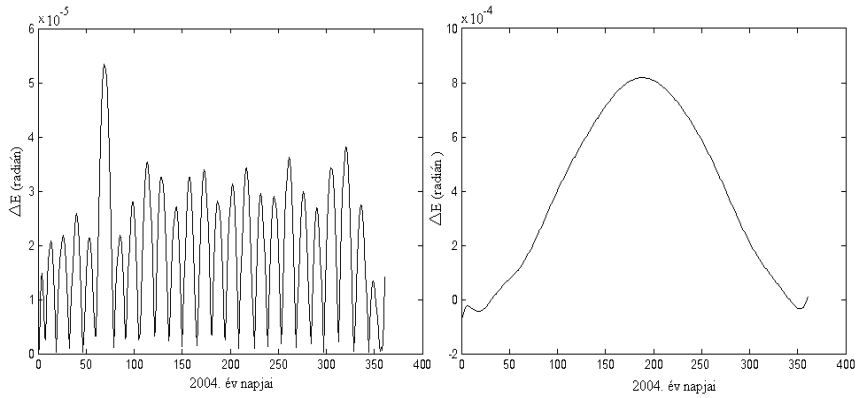
$$b_{31} = 2.29410824451.$$

Az excentrikus anomália közelítõ függvénye

Alkalmazva a (4) összefüggést és az előbb meghatározott súlyokat, az excentrikus anomáliára az alábbi explicit közelítő képlet adható:

$$E = \overline{\overline{w}} \cdot \tanh\left[\overline{w} \cdot \tanh\left(w \cdot \begin{bmatrix} M \\ e \end{bmatrix} + B_1^T\right) + B_2^T\right] + b_{31}, \qquad (10)$$

ahol $\tanh(A) = B$ és $B_{ij} = \tanh(A_{ij})$ minden $A = (A_{ij})_{i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ mátrixra.



5. ábra: Az excentrikus anomáliák közti eltérések

Ellenőriztük a (10) képletet a Föld pályamenti helyzetének pontos meghatározására a 2004-es évre. Az 5. ábra első grafikonja megmutatja az észlelt és a (10) képlettel számított excentrikus anomáliák közti ΔE eltérést. A második grafikon pedig a (10) képlettel számított és a Kepler-egyenlet által megadott excentrikus anomáliák közti különbséget mutatja. Az ábrákról leolvasható, hogy a tanított neuronháló approximációs képessége egy nagyságrenddel (10^{-5}) jobb mint a Kepler-egyenlet által adott érték (10^{-4}) és 10^{-4} pontossággal megközelíti a Kepler-egyenlet megoldását is.

Könyvészet

1. Bryson, A. E.–Ho, Y.-C., *Applied Optimal Control*, Blaisdell, New York, 1969.

2. Colwell, P., *Solving Kepler's Equation Over Three Centuries*, Ed. Willmann-Bell Inc., Richmond, Virginia, 1993.

3. Érdi B., *A Naprendszer dinamikája*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

4. Foresee, F. D.– Hagan, M. T., Gauss-Newton approximation to Bayesian regularization, *Proceedings of the 1997 International Joint Conference on Neural Networks*, 1997.

5. Mackay, D. J. C., Bayesian interpolation, *Neural Computation*, **vol. 4**, no. 3 (1992) pp. 415–447.

6. Makó Z.–Szenkovits F.–Garda-Mátyás E., Solution of Kepler-equation with artificial neural network, *Autom. Comput. Appl. Math.*, **13**, 2004 (megjelenés alatt).

7. Rosenblatt, F., A perceiving and recognizing automation, *Report 85-4601, Project P ARA, Cornell Aeronautical Laboratory, Ithaca*, New York, 1954.

8. Russell, S.–Norvig, P., *Mesterséges intelligencia*, Panem-Prentice-Hall, Budapest, 2001.

Dinamikus klaszterezés genetikai algoritmusokkal

Simon Károly
BBTE Kolozsvár, Matematikai és Informatikai Kar
Email: ksimon@cs.ubbcluj.ro

Az evolúciós algoritmusok sikerrel alkalmazhatóak multimodális optimalizálási problémák megoldására. A számítógépes fizikából inspirálódva javasoltunk egy új csatoltcellás eljárást. Ezt az eljárást kombináltuk a Genetic Chromodynamics evolúciós optimalizálási metaheurisztikával. Az új modell segítségével kifejlesztettünk egy dinamikus klaszterezési algoritmust (GCDC), és néhány új paraméteradaptációs technikát. A GCDC algoritmust alkalmaztuk néhány konkrét klaszterezési probléma megoldására.

Bevezetés

Az evolúciós algoritmusok sikerrel alkalmazhatóak komplex optimalizálási problémák megoldására [3]. Nagyon sok gyakorlati probléma esetében nemcsak a globális optimum megtalálása a cél, hanem több optimális, vagy az optimálist közelítő megoldás meghatározása is fontos lehet. Ezekben az esetekben beszélünk multimodális optimalizálási problémákról. A standard genetikai algoritmusok a globális optimum felé konvergálnak, így új, speciális technikákat kell bevezetnünk, ha multimodális optimalizálásra akarjuk használni azokat. A közelmúltban több evolúciós multimodális optimalizálásra alkalmas algoritmust sikerült kifejleszteni [2,12], de ezek általában megosztott hatékonysági függvényeket alkalmaznak, és számos pozitív tulajdonságuk mellett néhány hátránnyal is rendelkeznek. A hátrányok közé tartozik a túl korai konvergencia, érvénytelen megoldások bekerülése a végső populációba, és a keresési lépések elpazarlása.

2000-ben egy új evolúciós multimodális optimalizálási metaheurisztika látott napvilágot, a Genetic Chromodynamics (GC) [4]. Az alpopulációkat alkalmazó, rövidtávú kölcsönhatásokon alapuló GC modellből több hatékony algoritmust sikerült származtatni. 2003-ban a GC modell alapján sikerült kifejleszteni egy új dinamikus klaszterezési algoritmust, a GCDC-t [7].

A dinamikus klaszterezés egy tipikus multimodális optimalizálási probléma. A klaszterezés folyamán egy adathalmaz elemeit csoportokba soroljuk egymáshoz való hasonlóságuk alapján. Egy csoportot egy prototípus vektor határoz meg, a klaszterközéppont. A klaszterezés folyamán két problémát kell megoldanunk: meg kell határoznunk a csoportok számát, és meg kell találnunk a középpontokat. A hagyományos statikus klaszterezési eljárások nem alkalmasak az első probléma megoldására, ugyanis ezek a klaszterek számának a priori ismeretét feltételezik [13,14]. A közelmúltban többen próbálkoz-

tak dinamikus klaszterezési eljárások kifejlesztésével. A genetikai algoritmusok hatékony eszköznek bizonyultak a feladat megoldásához.

A GCDC algoritmust sikeresen alkalmaztuk különböző konkrét problémák megoldására, például radiális bázisfüggvény neurális hálózatok topológiájának tervezésére [5,6]. Az elmúlt két évben több változtatást és paraméteradaptációs technikát javasoltunk az algoritmus továbbfejlesztésének érdekében [8,9], és így sikerült egy általános és hatékony klaszterezési eljárást kifejleszteni.

A számítógépes fizika keretein belül, a molekuláris dinamikai szimulációknál alkalmazott csatoltcellás eljárásokból [1,15] inspirálódva kombináltuk a GC modellt egy csatoltcellás keresési eljárással [10]. Az így nyert új modell alapján átalakítottuk a GCDC algoritmust, új paraméteradaptációs technológiákat javasoltunk, általánosítva az algoritmust és jelentős mértékben csökkentve annak komplexitását [11].

A következőkben röviden ismertetem a GC metaheurisztikát, a csatoltcellás GCDC eljárást, majd bemutatok néhány kísérleti eredményt.

Genetic Chromodynamics

A Genetic Chromodynamics egy új evolúciós keresési és multimodális optimalizálási metaheurisztika. A GC modell a lokális kölcsönhatások elvén alapszik, alpopulácókat használ, és alkalmazza a stepping-stone keresési mechanizmust. A GC alapú eljárások esetében a populáció mérete dinamikusan változik, megjelenik egy új, a közeli egyedek egybeolvasztására használt operátor.

A stepping-stone keresési mechanizmusnak megfelelően a populáció mindegyik egyedének megvan a lehetősége, hogy hozzájáruljon a következő generáció kialakításához. A lokális kölcsönhatások elvének megfelelően az egyedek között csak rövid távú kölcsönhatások megengedettek.

A GC modellel együtt mikropopulációs modellt is alkalmazhatunk. Ennek megfelelően mindegyik egyednek megfeleltetünk egy kölcsönhatási tartományt. A kölcsönhatási tartományon belüli egyedek alkotnak egy mikropopulációt. A mikropopuláción belül alkalmazzuk a keresztezés operátort. Amennyiben nincsenek egyedek a kölcsönhatási tartományon belül, a mutációs operátort alkalmazzuk.

A GC alapú algoritmusok esetében az alpopulációk együtt fejlődnek és különböző optimum pontok fele konvergálnak. A populáció mérete az egybeolvasztás operátor alkalmazásával generációról generációra csökken. A végső generációban mindegyik alpopuláció egyetlen egyedet tartalmaz, ami egy optimumnak felel meg, így az utolsó populációt felépítő alpopulációk száma megegyezik a keresett optimumpontok számával.

A csatoltcellás eljárás

A számítógépes fizika keretein belül, a molekuláris dinamikai szimulációknál alkalmazott csatoltcellás eljárások alapján kifejleszthető egy evolúciós multimodális optimalizálási modellekkel kombinálható keresési eljárás.

A csatoltcellás technika a keresési teret kisebb, egymással összekapcsolt cellákra osztja. Mindenik generáción (időlépés) belül felépítjük a cellákon belüli kromoszómák (részecskék) listáját.

Egy kromoszóma esetében a kromoszómát tartalmazó cella k-ad rendű szomszédsága képezi a kromoszóma kölcsönhatási tartományát. Ezzel a módszerrel kitűnően kezelhetők a rövid távú kölcsönhatások. Adaptációs mechanizmusokat alkalmazhatunk a kölcsönhatási tartomány méretének változtatására (a k paraméter értékének változtatása), így elősegíthetjük az alpopulációk stabilizálódását. Ugyanakkor a csatoltcellás eljárás alkalmas új paraméteradaptációs eljárások bevezetésére.

Csatoltcellás GCDC

Minden klasztert egy prototípus határoz meg, és minden prototípust egy kromoszóma kódol.

A csatoltcellás technikának megfelelően a keresési teret kisebb, egymással összecsatolt cellára osztjuk. A cellák méretét a bemeneti adatok közötti minimális távolság alapján határozzuk meg.

Kezdetben mindegyik cellához hozzárendelünk egy-egy kromoszómát. A kezdeti populáció többi része véletlenszerűen generált.

Az egyed kölcsönhatási tartománya az egyedet tartalmazó cella k-ad rendű szomszédsága. Adaptációs mechanizmust alkalmazunk a k értékének beállítására. Kezdetben az elsőrendű szomszédság fogja képezni az egyed kölcsönhatási tartományát, majd a keresés folyamán növeljük ezt az értéket.

Mindegyik lépésnél változtatjuk az egyedek kölcsönhatási tartományát. Egy L_j kromoszóma esetében ellenőrizzük annak a D_j aktuális kölcsönhatási tartományában található pontok N_j halmazát. Kiterjesztjük a kölcsönhatási tartományt, hozzáadva a következőrendű szomszédságot. Legyen N_j^* a D_j^* kiterjesztett kölcsönhatási tartomány pontjainak halmaza.

Ha az aktuális kölcsönhatási tartomány nem tartalmaz pontokat ($N_j = \emptyset$), akkor kiterjesztjük azt, és D_j^* lesz az egyed új kölcsönhatási tartománya. Ha $N_j \neq \emptyset$ megvizsgáljuk a $N_j^* \backslash N_j$ halmazt. Amennyiben ez a halmaz tartalmaz pontokat ($N_j^* \backslash N_j \neq \emptyset$), kiterjesztjük a kölcsönhatási tartományt, D_j^*-ra változtatva azt. Ellenkező esetben nem változtatjuk a kölcsönhatási tartomány méretét.

A rátermettség ellenőrzésére egy Gauss-típusú hatékonysági függvényt alkalmazunk. Legyen $X = \{x_1, ..., x_n\}$ a bemeneti adatok halmaza, és $L = \{L_1, ..., L_m\}$ a prototípusokat leíró kromoszómák halmaza. Az L_j kromoszóma rátermettségének meghatározására alkalmazhatjuk a következő függvényt:

$$g\left(L_j\right) = \sum_{i=1}^{m} e^{-\frac{\left\|x_i - L_j\right\|^2}{\gamma_j^2}}.$$

A megfelelő normál eloszlás paraméterei L_j és γ_j. Amennyiben adaptációs mechanizmust alkalmazunk a γ_j variancia paraméter értékének változtatására, dinamikus rátermettségi függvényt nyerünk. Ennek érdekében összefüggést vezethetünk be a γ_j értéke és a kölcsönhatási tartomány aktuális mérete között.

Mindegyik lépésnél újraszámoljuk a variancia paraméter aktuális értékét a kölcsönhatási tartományon belül lévő pontok közötti átlagtávolság függvényében. Amennyiben a kölcsönhatási tartomány nem tartalmaz pontokat, a tartomány aktuális átmérőjét használjuk a variancia értékének meghatározására.

A kiválasztásra mikropopuláció modellt alkalmazunk. Az egyedek keresztezésére alkalmazhatjuk a szülők génjeinek konvex kombinációját. A mutáció lehet a génállomány additív perturbációja egy N(0,σ) normál eloszlásból választott véletlenszerű értékkel. A mutáció léptéke (σ) az eljárás paramétere lesz. A csatoltcellás eljárás esetében összefüggést vezethetünk be az aktuális kölcsönhatási tartomány átmérője és a mutáció léptéke között. Ennek a módszernek megfelelően a mutáció folyamán keletkezett új egyed nem léphet ki a szülő kölcsönhatási tartományából. Ezzel a módszerrel elkerülhető a hasznos megoldások elveszítése.

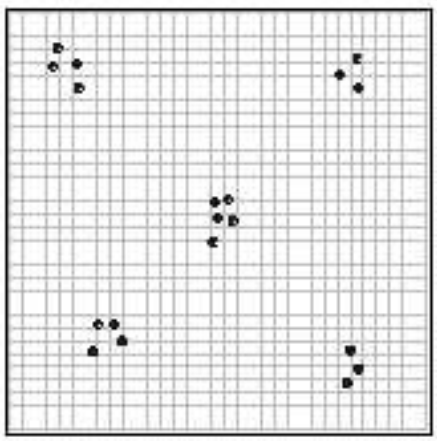
Amikor egy új egyed keletkezik, megvizsgáljuk annak rátermettségét, összehasonlítjuk a szülő rátermettségével, és a nagyobb rátermettségi értékkel rendelkező fog továbblépni a következő generációba.

Ha két egyed nagyon közel kerül egymáshoz a keresés folyamán, egybeolvasztjuk azokat. Az egybeolvasztás operátort akkor alkalmazzuk, ha az egyedek közötti távolság az ε egybeolvasztási küszöbérték alá csökken. A csatoltcellás eljárás esetében módosíthatjuk a szabályt: azokat az egyedeket olvasztjuk egybe, amelyek azonos cellába kerülnek. Ez a feltétel azonban túl erősnek bizonyulhat bizonyos esetekben, ezért egy végső egybeolvasztási eljárást is alkalmazhatunk.

Az egybeolvasztási operátor alkalmazásának következményeként a keresés folyamán a populációk mérete generációról generációra csökken. A keresés akkor ér véget, ha egy adott számú egymás utáni generáción keresztül már nem történik változás a populációk összetételében. Ekkor a keresés leáll, és az utolsó populáció egyedei fogják képezni a klaszterközéppontokat. A bemeneti pontok mindegyikét hozzárendeljük a legközelebbi középponthoz, és ilyen módon megkapjuk a bemeneti adathalmaznak megfelelő klaszterstruktúrát.

A végső populáción végrehajtott egybeolvasztási eljárás alapulhat néhány egyszerű szabályon. Ha két egyed kölcsönhatási tartománya ugyanazokat a pontokat tartalmazza, akkor ezeket az egyedeket egybeolvasztjuk. Ha két egyed kölcsönösen benne van egymás kölcsönhatási tartományában, egybeolvasztjuk ezeket az egyedeket.

A végső egybeolvasztáson kívül bizonyos utómunkálatokat is végrehajthatunk a végső populáción. Ha találunk olyan prototípusokat, amelyekhez nem tartoznak pontok, ezeket eltávolítjuk a populációból. Ha találunk olyan klasztert, amely felírható több másik klaszter egyesítéseként, akkor annak



6. ábra: A bemeneti adathalmaznak megfelelő csatoltcellás felosztás.

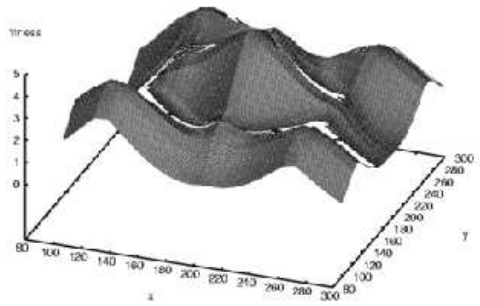
középpontját eltávolítjuk a populációból. Ezután egy finomhangolási eljárást alkalmazhatunk, amelynek során a középpontokat elmozdítjuk a klaszterek súlypontjainak irányába.

Kísérleti eredmények

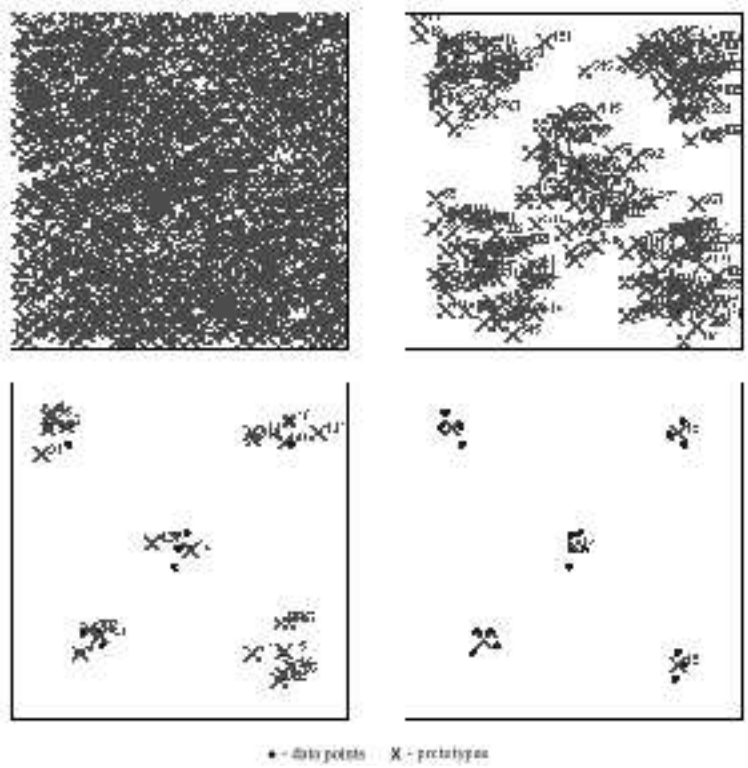
Az előző részben bemutatott csatoltcellás GCDC algoritmust alkalmaztuk néhány konkrét klaszterezési probléma megoldására. A következőkben ismertetek egy ilyen esetet.

Először egy $X = \{x_1, x_2, ..., x_{19}\}$, $x_i \in [100, 300] \times [100, 300]$ bemeneti adathalmazt alkalmaztunk. Az adathalmaznak megfelelő csatoltcellás felosztás a 1. ábrán látható. A Gauss típusú hatékonysági függvény által meghatározott rátermettségi tájképet, egy rögzített variancia érték esetében (X halmaz standard deviációja) a 2. ábrán ábrázoltuk. A csatoltcellás GCDC algoritmus által adott eredmények a keresés különböző fázisaiban a 3. ábrán láthatók.

A továbbiakban húsz különböző adathalmazra hajtottuk végre az algoritmust. Az adathalmazok között jelentős különbségek voltak a bemeneti pontok eloszlásának és a klaszterek méretének tekintetében. Összehasonlítottuk a standard GCDC algoritmust a csatoltcellás GCDC algoritmussal. A standard algoritmus 16 esetben adott helyes eredményt. A csatoltcellás eljárás a végső egybeolvasztás és utómunkálat alkalmazása nélkül csak 12 esetben adott helyes megoldást. A végső egybeolvasztás végrehajtása után a helyes eredmények száma 18-ra növekedett. Az utómunkálatok alkalmazásával a maradék két hibás megoldást is sikerült kiszűrni a végső populációból, így a csatoltcellás GCDC algoritmus végül mind a húsz esetben helyes eredményt adott.



7. ábra: A hatékonysági függvény által meghatározott rátermettségi tájkép.



8. ábra: A csatoltcellás GCDC algoritmus által adott eredmények 1, 10, 50, illetve 150 generáció után.

Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek

A GC új evolúciós multimodális optimalizálási metaheurisztika alkalmasnak bizonyult egy új dinamikus klaszterezési algoritmus kifejlesztésére. Ezt az új algoritmust egy csatoltcellás eljárással kombinálva sikerült továbbfejleszteni.

A kísérleti eredmények bizonyítják, hogy az új csatoltcellás GCDC algoritmus alkalmas a klaszterek számának, valamint a klaszterközéppontoknak helyes meghatározására.

A későbbiekben a cellastruktúra adaptációjával lehetőség nyílna az algoritmus továbbfejlesztésére. Egy másik kihívást jelent a prototípusok formájának adaptációja.

Könyvészet

1. Allen M. P., Tildesley D. J., *Computer Simulation of Liquids*, Clarendon Press, Oxford 1987.

2. Deb K., Goldberg D.E., An investigation of niche and species formation in the genetic function optimization, *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms, J.D. Schaffer (Ed.), Morgan Kaufmann, San Mateo, CA*, (1989) pp. 42-50.

3. Dumitrescu D., Lazzerini B., Jain L. C., Dumitrescu A., *Evolutionary Computation*, CRC Press, Boca Raton 2000.

4. Dumitrescu D., Genetic Chromodynamics, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Ser. Informatica*, **35**, (2000) pp. 39-50.

5. Dumitrescu D., Simon K., Reducing Complexity of RBF Neural Networks by Dynamic Evolutionary Clustering Techniques, *Proceedings of CAIM*, (2003) pp. 83-89.

6. Dumitrescu D., Simon K., Genetic Chromodynamics for Designing RBF Neural Networks, *Proceedings of SYNASC*, (2003) pp. 91-101.

7. Dumitrescu D., Simon K., Evolutionary Prototype Selection, *Proceedings of ICTAMI*, (2003) pp. 183-191.

8. Dumitrescu D., Simon K., Fitness Functions and Interaction Domain Adaptation Mechanisms for Dynamic Evolutionary Clustering, *Proceedings of ICCC*, (2004) pp. 132-138.

9. Dumitrescu D., Simon K., Post-processing techniques for evolutionary clustering, *Proceedings of the Symposium "Zilele Academice Clujene"*, (2004) pp. 75-83.

10. Dumitrescu D., Ferenc Járai-Szabó, Simon K., Link-Cell method for evolutionary multi-modal optimization. Application in dynamic evolutionary Clustering, *submitted to Carpathian J. Math*, (2004).

11. Dumitrescu D., Ferenc Járai-Szabó, Simon K., Link-Cell methods for dynamic evolutionary clustering, *Proceeding of SYNASC*, (2004) pp. 480-490.

12. Goldberg D.E., Richardson J., Genetic algorithms with sharing for multimodal optimization, *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Genetic Algorithms, J.J. Grefenstette (Ed.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ*, (1987) pp. 41-49.

13. Schreiber T., *A Voronoi Diagram Based Adaptive k-means Type Clustering Algorithm for Multidimensional Weighted Data* Technical Report, Universitat Kaiserslautern, 1989.

14. Selim S. Z., Ismail M. A., k-means Type Algorithms: A Generalized Convergence Theorem and Characterization of Local Optimality, *IEEE Tran. Pattern Anal. Mach. Intelligence, PAMI-6*, **1,** (1986) pp. 81-87.

15. Quentrec B., Brot C., New methods for searching for neighbours in molecular dynamics computations, *J. Comp. Phys.*, **13**, (1975) pp. 430-432.

Egy csillagszerűségi feltételről

Szász Róbert
Sapientia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar, Marosvásárhely
Email: szasz_robert2001@yahoo.com

Albert László Róbert
Sapientia EMTE, Informatika III év, Marosvásárhely

Bevezetés

Jelölje $\mathcal{A}$ az $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ egységkörön értelmezett analitikus függvények osztályát, amelyek sorbafejtése $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., z \in U$ alakú és jelölje S^* az $\mathcal{A}$ osztály azon f függvények alosztályát, amelyek esetén $f(U)$ csillagszerű tartomány az origóra nézve. $\alpha \geq 0$ esetén, legyen

$$R_\alpha = \{f \in \mathcal{A} : Re(f'(z) + \alpha f''(z)) > 0, z \in U\}.$$

Az

$$A(f)(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{és} \quad L(f)(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt$$

egyenlőségek az Alexander- és a Libera-operátort értelmezik.

J.Krzyz az [1] cikkében bebizonyította, hogy $R_0 \nsubseteq S^*$. Más részről R. Singh és S. Singh azt bizonyította be [4] -ben, hogy $A(R_0) \subset S^*$, ahol A az Alexander-operátort jelöli, ez az eredmény azzal ekvivalens, hogy $R_1 \subset S^*$. P.T. Mocanu élesítette ezt az állítást, [2]-ben megmutatva, hogy $L(R_0) \subset S^*$ ami a következő alakba írható $R_{\frac{1}{2}} \subset S^*$. Egyszerűen belátható, hogy $R_\alpha \subset R_\beta$, ha $\alpha > \beta \geq 0$. A [2] cikkében P.T. Mocanu azt a feladatot tűzi ki, hogy határozzuk meg az

$$m = \inf\{\alpha \in (0, \infty) : R_\alpha \subset S^*\} \tag{1}$$

pontos értékét. Ismereteink szerint az előbbi feladat ezidáig megoldatlan. A [3] cikkben P.T. Mocanu bebizonyította, hogy

$$R_\alpha \subset S^* \qquad \text{ha} \qquad \alpha \geq 0,348.... \tag{2}$$

A jelen cikk célja az, hogy igazoljuk, hogy

$$m \leq \frac{1}{7}. \tag{3}$$

Az idézett művekben a differenciális alárendelések módszerét alkalmazták a szerzők, a továbbiakban a bizonyításban a fő eszköz a konvolúciók módszere lesz.

Előzetes eredmények

Adott $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ U-ban analitikus függvények esetén a két függvény Hadamard szorzatát, vagy más szóval konvolúcióját az

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

egyenlőséggel értelmezzük. Jelölje A_0 azon f függvények osztályát, amelyek analitikusak U-ban és amelyekre igaz, hogy $f(0) = 1$ és legyen $\mathcal{P}$ azon alosztálya A_0-nak, amelyet a következő egyenlőség értelmez:

$$\mathcal{P} = \{f \in A_0 : Re(f(z)) > 0, z \in U\}.$$

Ha $V \subset A_0$ akkor V duálisa, amit V^* jelöl, azon g függvényekből áll amelyek teljesítik, hogy $g \in A_0$ és $(f * g)(z) \neq 0$ minden $f \in V$ és minden $z \in U$ esetén. Legyen h_T a következő függvény

$$h_T(z) = \frac{1}{1+iT}\left[iT\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2}\right]. \quad T \in R$$

Vegyük észre, hogy h_T benne van az $\mathcal{A}$ osztályban. Az eredmenyünk igazolásához szükségünk van a következő tételekre, amelyek [5]-ben vannak bebizonyítva.

1. tétel ([5] p. 23). *(dualitás elve) A $\mathcal{P}$ osztály konvolúció szerinti duálisa a következő*

$$\mathcal{P}^* = \{f \in A_0 | Re(f(z)) > \frac{1}{2}, z \in U\}.$$

2. tétel ([5] p. 94). *Az $f \in \mathcal{A}$ függvény akkor és csak akkor tartozik az S^* csillagszerű függvények osztályához, ha $\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0$ bármely $T \in R$ és bármely $z \in U$ esetén.*

Fő eredmény

3. tétel. *Ha $f \in \mathcal{A}$ és $f'(z) + \frac{1}{7}zf''(z) > 0$ $z \in U$ akkor $f \in S^*$.*

Bizonyítás. A tétel feltételeiből következik, hogy $f'(z) + \frac{1}{7}zf''(z) \in \mathcal{P}$ és ha az f függvény Mac-Lauren sora a következő $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, akkor a Herglotz-formula alapján

$$f'(z) + \frac{1}{7}zf''(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-iist}} d\mu(t)$$

ahol μ egy olyan mérték a $[0, 2\pi]$ intervallumon, amelyre $\mu([0, 2\pi]) = 1$. Legyen $\alpha = \frac{1}{7}$.
Egy egyszerű számolás a következő egyenlőséghez vezet:

$$f'(z)+\alpha z f''(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(\alpha n+1)z^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

ahonnan következik, hogy

$$a_n = \frac{2}{n(1+\alpha(n-1))} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t} d\mu(t), \ n \in N, \ n \geq 2$$

és

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(\alpha n+1)} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t). \tag{4}$$

Az 1. tétel szerint az f függvény akkor és csak akkor csillagszerű, ha

$$\frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \neq 0 \ \text{ bármely } \ z \in U \text{ és } \ \text{bármely } \ T \in R \tag{5}$$

ahol

$$h_T(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+iT}{1+iT} z^{n+1}.$$

Egyszerű belátni, hogy

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z} * \frac{h_T(z)}{z} \quad &= \quad \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)\right) * \\ &* \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+iT}{(1+iT)(n+1)(\alpha n+1)} z^n\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Mivel $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \in \mathcal{P}$ bármely μ mérték esetén amely teljesíti a $\mu([0, 2\pi]) = 1$ feltételt az 1. tételből és a (6) összefüggésből az következik, hogy az (5)-ös csillagszerűségi feltétel a következővel ekvivalens:

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+iT}{(1+iT)(n+1)(\alpha n+1)} z^n\right) > \frac{1}{2} \quad \text{bármely} \quad z \in U, T \in R. \tag{7}$$

A $p = \frac{1}{\alpha}$ jelölést használva a (7) egyenlőtlenség a következő alakba írható

$$\frac{1}{2p} + \frac{1}{1+T^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n+p} + T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta}{(n+1)(n+p)} + T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)(n+p)}\right) \geq 0,$$

bármely $\theta \in (0, 2\pi), T \in R$. Bevezetjük a következő jelölést:

$$M(\theta, T) =$$

$$= \frac{1}{2p} + \frac{1}{1+T^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n+p} + T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta}{(n+1)(n+p)} + T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)(n+p)}\right).$$

és az elöbbiek alapján az f függvény akkor és csak akkor lesz csillagszerű, ha

$$M(\theta, T) \geq 0 \quad \text{bármely} \quad T \in R, \theta \in (0, 2\pi). \tag{8}$$

A következő lépésben egy azonosságot vezetünk le. A Γ görbe a következő részgörbékből tevödik össze: $\gamma_1(t) = Re^{it}, \gamma_2(t) = re^{-it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma_3(t) = iR + t(ir - iR)$ és $\gamma_4(t) = -ir + t(ir - iR)$, $t \in [0, 1]$. Kiszámítjuk a következő integrált $\int_\Gamma f(z)dz$, ahol

$$f(z) = \frac{e^{i\theta z}}{(p+z)(e^{2\pi i z} - 1)}, \beta > 0.$$

Az integrál kiszámításához a reziduumtételt használjuk. Egyszerűen belátható, hogy:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0, \mathrm{Rez}(f, k) = \frac{e^{i\theta k}}{2\pi i(k+p)},$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)dz = -i\pi \cdot \mathrm{Rez}(f, 0),$$

ahonnan azt kapjuk, hogy:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{\gamma_3 \cup \gamma_4} f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\theta k}}{k+p}. \tag{9}$$

A (9) egyenlőségből egyszerű számolás után kapjuk (10)-et:

$$\frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n+p} = \int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x} + e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(e^{2\pi x} - 1)} dx$$

$$\frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+p)(n+1)} = (p+1)\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x} + e^{\theta x})}{(1+x^2)(p^2+x^2)(e^{2\pi x} - 1))} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta}{(n+p)(n+1)} = (p+1)\int_0^\infty \frac{x^2(e^{(2\pi-\theta)x} - e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(1+x^2)(e^{2\pi x} - 1)} dx. \tag{10}$$

A (10)-es azonosságok alapján az $M(\theta, T)$ kifejezés a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} M(\theta,T) &= \frac{1}{1+T^2}\Bigg(\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx + \\ &+T(p+1)\int_0^\infty \frac{x^2(e^{(2\pi-\theta)x}-e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(1+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx + \\ &+T^2(p+1)\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(1+x^2)(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1))}dx\Bigg), \end{aligned} \tag{11}$$

$\theta \in (0, 2\pi),\ T \in R.$

Most bebizonyíthatjuk a (8)-as egyenlőtlenséget. Mivel $M(\theta, T)$ kifejezésében a zárójelben T-nek egy másodfokú polinomja van, a (8) egyenlőtlenség akkor lesz igaz, ha a zárójelben levő kifejezés diszkriminánsa negatív.

$$\Delta(\theta) = \left((p+1)\int_0^\infty \frac{x^2(e^{(2\pi-\theta)x}-e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(1+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx\right)^2 -$$

$$-4(p+1)\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(1+x^2)(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1))}dx\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx. \tag{12}$$

Bevezetjük a jelöléseket: $f_1, f_2 : (0, \pi) \to R$,

$$f_1(\theta) = \left((p+1)\int_0^\infty \frac{x^2(e^{(2\pi-\theta)x}-e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(1+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx\right)^2,$$

$$f_2(\theta) = 4(p+1)\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(1+x^2)(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1))}dx\int_0^\infty \frac{x(e^{(2\pi-\theta)x}+e^{\theta x})}{(p^2+x^2)(e^{2\pi x}-1)}dx.$$

Tehát a (8) egyenlőtlenség bizonyításához elég belátni, hogy:

$$\Delta(\theta) \le 0, \theta \in (0, 2\pi). \tag{13}$$

A (12) egyenlőségből következik, hogy elégséges ha (13)-at bebizonyítjuk a következő esetben :

$$\Delta(\theta) \le 0, \theta \in (0, \pi). \tag{14}$$

Mivel az f_1, f_2 függvények szigorúan csökkenőek a $(0, \pi)$ intervallumon és $\Delta(\theta) = f_1(\theta) - f_2(\theta)$ ha az f_1 függvényt folytonosan meghosszabbítjuk 0-ban és igazoljuk, hogy

$$f_1(x_k) < f_2(x_{k+1}),\ \text{ahol } x_k = \frac{k\pi}{100}\ , k = 0, 99 \tag{15}$$

akkor az f_1 és f_2 monotonitása alapján felírható, hogy $f_1(t) < f_1(x_k) < f_2(x_{k+1}) < f_2(t)\ , t \in [x_k, x_{k+1}]$, k=0,99 és így következik (14).

A(15)-ben szereplő egyenlőtlenségek egyszerűen igazolhatók számítógép segítségével, a $p = 7$ esetben figyelembe véve, hogy:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta}{(n+1)(n+p)}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{(p-1)^2}\left[p\left(\cos p\theta \frac{\pi-\theta}{2} + \sin p\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \right.\right. \\ &+ \left.\left. \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(p-k)\theta}{k}\right) - \frac{\pi-\theta}{2}\cos\theta - \sin\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f_2(\theta) &= 4\left(\frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n+p}\right)\left(\frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+p)(n+1)}\right) = \\ &= 4\left(\frac{1}{2p} - \cos\theta \ln 2\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\theta}{2}\sin\pi\theta - \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(p-k)\theta}{k}\right) \\ &\quad \left[\frac{1}{2p} + \frac{1}{p-1}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\sin\theta - \cos\theta \ln 2\sin\frac{\theta}{2} - 1 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \cos p\theta \ln 2\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\pi-\theta}{2}\sin p\theta + \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(p-k)\theta}{k}\right)\right]. \end{aligned}$$

■

Könyvészet

1. Krzyz, J., A counterexample concerning univalent functions, *Folia Soc. Scient. Lubliniensis*, 2(1962), p. 57-58

2. Mocanu, P.T., On starlikeness of Libera transform, *Mathematica* (Cluj), 28(51)(1986), p. 153-155

3. Mocanu,P.T., On starlikeness of certain integral operators, *Mathematica* (Cluj), 36(59), 2 (1994), p. 179-184

4. Singh, R. and Singh, S., Starlikeness and convexity of certain integrals, *Ann. Univ. Mariae Curie-Slodowska*, SectA, 16(1981), p. 145-148.

5. Ruscheweyh, St., *Convolution in Geometric Function Theory*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

Parciális függvények Ω-algebrájáról

Szilágyi Miklós
Sapientia EMTE, Műszaki és Humántudományok Kar, Marosvásárhely
Email: mszilagyi@ms.sapientia.ro

Ebben a dolgozatban tanulmányozzuk bizonyos halmazon értelmezett parciális függvények, vagyis az illető halmaz részhalmazain értelmezett függvények, algebrai és topológiai struktúráját, ha a parciális függvények értékei egy topologikus Ω-algebra elemei.

Legyen I és G két tetszőleges nem üres halmaz. Az I halmaz részhalmazainak halmazát a továbbiakban $\mathcal{B}(I)$ jelöli. Használni fogjuk még a:

$$G^{\Delta} = \{f \subseteq \Delta \times G \mid f^{-1} \circ f \supseteq 1_{\Delta}, f \circ f^{-1} \subseteq 1_G\}$$

jelölést, ahol bármely X halmaz esetében $1_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Ha $\Delta = \emptyset$, akkor $G^{\Delta} = G^{\emptyset} = \{\emptyset\}$.

Az

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(I, G) = \cup\{G^{\Delta} \mid \Delta \in \mathcal{B}(I)\}$$

halmaz elemeit **parciális függvényeknek** fogjuk nevezni. Ha $f \in G^{\Delta}$, akkor f egy I-re vonatkozó G-beli értékekkel rendelkező **parciális** függvény. Ha $f \in \mathcal{M}(I, G)$, akkor a

$$\Delta_f = \{\nu \in I \mid (\exists\, x)(x \in G \text{ úgy, hogy } (\nu, x) \in f)\}$$

halmazt az f függvény első vetületének fogjuk nevezni. Természetesen $\Delta_{\emptyset} = \emptyset$.

Legyen (G, Ω) egy végesváltozós műveletű Ω-algebra (Ω típusú algebra, ahol minden $\omega \in \Omega$ egy véges változós (aritású) művelet) [1], [2], [4], [10]. A megszokott

$$\Omega(n) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \ n \text{ változós (aritású) művelet}\} = \{\omega \in \Omega \mid a(\omega) = n\},$$

jelölést használva, természetesen az

$$\Omega = \cup\{\Omega(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

összefüggést kapjuk.

Legyen $(G, +)$ egy félcsoport és (G, Ω) egy univerzális algebra. Akkor azt mondjuk, hogy $(G, +, \Omega)$ egy **Ω-félcsoport** (**multioperátor félcsoport**) [12], [13]). Ha a $(G, +)$ félcsoport rendelkezik $0 \in G$ zérus elemmel és bármely $\omega \in \Omega(n)$ esetén $\omega 00 \ldots 0 = 0$, akkor $(G, +, \Omega)$ egy **zéró elemes Ω-félcsoport** [12], [13]. Ha $(G, +)$ egy csoport és $(G, +, \Omega)$ egy zéró elemes Ω-félcsoport, akkor $(G, +, \Omega)$ egy **Ω-csoport** [3]. Ha a "+" művelet kommutatív, akkor **kommutatív Ω-félcsoport**ról (**csoport**ról) beszélünk.

1. értelmezés.

(i) Legyen (G, Ω) egy végesváltozós műveletű Ω-algebra. Legyen $\omega \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ és $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}^n$ egy tetszőleges elem. Akkor: $\omega f = \omega f_1 f_2 \ldots f_n = \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \cap \Delta_{f_i},\ i = \overline{1,n}$ és

$x = \omega[f_1(\nu)][f_2(\nu)] \ldots [f_n(\nu)]\}$.

(ii) Legyen $(G, +)$ egy félcsoport, f_1 és f_2 $\mathcal{M}$-nek két tetszőleges eleme. Akkor:

$$f_1 + f_2 = \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \text{ és } x = f_1(\nu) + f_2(\nu)\}.$$

Megjegyzés. Az **1. értelmezés** alapján nyilvánvaló, hogy:

(a) Ha $(G, +)$ félcsoport, akkor

(i) bármely $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ elemekre érvényes:

$$\Delta_{f_1+f_2} = \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2};$$

(ii) bármely $f \in \mathcal{M}$ elemre nézve érvényes:

$$f + \emptyset = \emptyset + f = \emptyset;$$

(b) Ha (G, Ω) egy Ω-algebra, akkor érvényes:

(i) bármely $\omega \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ és bármely $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}^n$, elemekre nézve érvényes:

$$\Delta_{\omega f_1 f_2 \ldots f_n} = \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \cdots \cap \Delta_{f_n};$$

(ii) bármely $\omega \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ és bármely $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots$ $\ldots, f_n \in \mathcal{M}$, $i = \overline{1,n}$, elemekre nézve érvényes:

$$\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1} \emptyset f_{i+1} \ldots f_n = \emptyset.$$

1. tétel.

(a) Ha (G, Ω) egy Ω-típusú univerzális algebra, akkor $(\mathcal{M}, \Omega)$ úgyszintén egy Ω-típusú univerzális algebra;

(b) Ha $(G, +, \Omega)$ egy Ω-félcsoport, akkor $(\mathcal{M}, +, \Omega)$ úgyszintén egy Ω-félcsoport;

(c) Ha $(G, +, \Omega)$ egy $0 \in G$ zéruselemmel rendelkező Ω-félcsoport, akkor $(\mathcal{M}, +, \Omega)$ úgyszintén egy zéruselemmel rendelkező Ω-félcsoport, ahol a zéruselem szerepét a $\theta_I \in G^I$, $\theta_I(\nu) = 0$, minden $\nu \in I$-re nézve, nullfügvény tölti be.

(d) *Ha* $(G, +, \Omega)$ *egy kommutatív* Ω*-félcsoport, akkor* $(\mathcal{M}, +, \Omega)$ *úgyszintén egy kommutatív* Ω*-félcsoport;*

(e) *Ha* $(G, +, \Omega)$ *egy disztributív* Ω*- félcsoport ([13], [15]), akkor* $(\mathcal{M}, +, \Omega)$ *úgyszintén egy disztributív* Ω*-félcsoport.*

Bizonyítás.

(a) Bármely $\omega \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, és bármely $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}^n$, elemekre nézve érvényes, hogy $\omega f = \omega f_1 f_2 \ldots f_n \in \mathcal{M}$.

Ha $a(\omega) = 0$ és ω nulláris művelet hatása valamely $g_\omega \in G$ elem megjelölése [10], akkor az ω művelet hatása az $(\mathcal{M}, \Omega)$ az $f_\omega \in \mathcal{M}$ függvény megjelölése, ahol $f_\omega(\nu) = g_\omega$, bármely $\nu \in I$ elemre vonatkozóan.

(b) Bármely $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{M}$ elemekre nézve érvényes:

$$\begin{aligned}
&(f_1 + f_2) + f_3 = \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1+f_2} \cap \Delta_{f_3} \text{ és } x = (f_1 + f_2)(\nu) + f_3(\nu)\} \\
&= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \Delta_{f_3} \text{ és } x = f_1(\nu) + f_2(\nu) + f_3(\nu)\} \\
&= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2+f_3} \text{ és } x = f_1(\nu) + (f_2 + f_3)(\nu)\} \\
&= f_1 + (f_2 + f_3);
\end{aligned}$$

(c) Bármely $f \in \mathcal{M}$, elemre nézve érvényes:

$$\begin{aligned}
f + \theta_I &= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_f \text{ és } x = f(\nu) + \theta_I(\nu)\} \\
&= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_f \text{ és } x = f(\nu) + 0 = 0 + f(\nu)\} \\
&= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_f \text{ és } x = f(\nu)\} \\
&= \theta_I + f = f.
\end{aligned}$$

Ha $\omega \in \Omega(n)$, akkor bármely $\nu \in I$ elemre nézve teljesül: $\omega\theta_I\theta_I \ldots \theta_I(\nu) = \omega[\theta_i(\nu)][\theta_i(\nu)] \ldots [\theta_I(\nu)] = \omega 00 \ldots 0 = 0 = \theta_I(\nu)$, tehát az $\omega\theta_I\theta_I \ldots \theta_I = \theta_I$ egyenlőség is teljesül.

(d) Bármely $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ és bármely $\nu \in I$ elemekre nézve érvényes:

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)(\nu) &= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \text{ és } x = f_1(\nu) + f_2(\nu)\} = \\
&= \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_2} \cap \Delta_{f_1} \text{ és } x = f_2(\nu) + f_1(\nu)\} \\
&= (f_2 + f_1)(\nu)
\end{aligned}$$

tehát $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$.

(e) [13], illetve [15] szerint egy multioperátor félcsoport disztributív, ha bármely $\omega \in \Omega(n)$, $1 \leq i \leq n$ és bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ elemekre teljesül az

$$\omega x_1 x_2 \ldots x_{i-1}(x_i + a)x_{i+1} \ldots x_n = \omega x_1 x_2 \ldots x_i + \omega x_1 x_2 \ldots x_{i-1} a x_{i+1} \ldots x_n.$$

feltétel. (Minden csoport, gyűrű, operátorcsoport, stb. tekinthető disztributív Ω-multioperátorcsoportnak).

Legyen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $f \in \mathcal{M}$ tetszőleges elemrendszer. Akkor bármely $\omega \in \Omega(n)$ és bármely $1 \leq i \leq n$, $\nu \in I$, elemekre érvényes:

$$\begin{aligned}
& (\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1}(f_i + f)f_{i+1} \ldots f_n)(\nu) = \\
= \; & \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1}(f_i+f)f_{i+1} \ldots f_n} \text{ és} \\
x = \; & (\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1}(f_i + f)f_{i+1} \ldots f_n)(\nu)\} \\
= \; & \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \ldots \\
& \cdots \cap \Delta_{f_{i-1}} \cap \Delta_{f_i+f} \cap \Delta_{f_{i+1}} \cdots \cap \Delta_{f_n} \text{ és} \\
x = \; & \omega f_1(\nu) f_2(\nu) \ldots f_{i-1}(\nu)[f_i + f](\nu) f_{i+1}(\nu) \ldots f_n(\nu)\} \\
= \; & \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in \Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \ldots \\
& \cdots \cap \Delta_{f_i} \cap \Delta_f \cap \Delta_{f_{i+1}} \cap \cdots \cap \Delta_{f_n} \text{ és} \\
x = \; & \omega f_1(\nu) f_2(\nu) \ldots f_i(\nu) \ldots f_n(\nu) + \omega f_1(\nu) f_2(\nu) \ldots \\
& \ldots f_{i-1}(\nu) f(\nu) f_{i+1}(\nu) \ldots f_n(\nu)\} \\
= \; & \{(\nu, x) \in I \times G \mid \nu \in (\Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \cdots \cap \Delta_{f_{i-1}} \cap \Delta_{f_i} \cap \Delta_{f_{i+1}} \cap \ldots \\
& \cdots \cap \Delta_{f_n}) \cap (\Delta_{f_1} \cap \Delta_{f_2} \cap \cdots \cap \Delta_{f_{i-1}} \cap \Delta_f \cap \Delta_{f_{i+1}} \cap \cdots \cap \Delta_{f_n}) \text{ és} \\
x = \; & \omega f_1(\nu) f_2(\nu) \ldots f_i(\nu) \ldots f_n(\nu) + \omega f_1(\nu) f_2(\nu) \ldots \\
& \ldots f_{i-1}(\nu) f(\nu) f_{i+1}(\nu) \ldots f_n(\nu)\} \\
= \; & (\omega f_1 f_2 \ldots f_n)(\nu) + (\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f f_i \ldots f_n)(\nu).
\end{aligned}$$

A fentiek alapján nyilván teljesül az

$$\omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1}(f_i + f) \ldots f_n = \omega f_1 f_2 \ldots f_n + \omega f_1 f_2 \ldots f_{i-1} f f_{i+1} \ldots f_n.$$

disztributivitási feltétel.

■

Legyen $(G, +, \omega)$ egy Ω-csoport (Ω-félcsoport) és (G, τ) egy T_2-topologikus tér. A következőkben szükségünk lesz néhány – az algebrai és topológiai struktúrák összeférhetőségét jellemző – függvényre. Így tekinteni fogjuk:

- az $s : G^2 \to G$, $s(x, y) = x + y$, összeg-függvényt;
- az $i : G \to G$, $i(x) = -x$, ellentétes elem-függvényt (csak multioperátorcsoportok esetében);

- $h^n_\omega : G^n \to G$, $h^n_\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega x_1 x_2 \ldots x_n$ Higgins-féle függvényeket, ahol $\omega \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A továbbiakban a G^n, $(n \in \mathbb{N}^*)$ fölött mindig a τ topológia által származtatott szorzat topológiát tekintjük.

Ha (G, Ω) egy Ω-algebra és a τ topológia összeférhető az Ω-algebra struktúrával, vagyis a $h^n_\omega : G^n \to G$ $(\omega \in \Omega(n), n \in \mathbb{N}^*)$ függvények folytonosak, akkor $(G, +, \Omega, \tau)$ egy **τ-topologikus Ω-algebra** [7]. Ha $(G, +, \Omega)$ egy Ω-félcsoport és (G, Ω, τ) egy τ-topologikus Ω-algebra, ahol az $s : G^2 \to G$ összeg-függvény szintén folytonos, akkor $(G, +, \Omega, \tau)$ egy **τ-topologikus Ω-félcsoport**. Ha $(G, +, \Omega)$ egy Ω-csoport és $(G, +, \Omega, \tau)$ egy olyan τ-topologikus Ω-félcsoport, ahol az ellentétes elem-függvény is folytonos, akkor $(G, +, \Omega, \tau)$ egy **τ-topologikus Ω-csoport** ([16], [17]). Ha $(G, +, \Omega, \tau)$ egy τ-topologikus csoport, akkor $(G, +, \tau)$ a $(G, +, \Omega, \tau)$ topologikus Ω-csoport **additív τ-topologikus csoportja**.

Ha $\mathcal{B}$ egy bázisa a $0 \in G$ zérus elem $\mathcal{V}_0$ teljes környezetrendszerének, akkor

$$a + \mathcal{B} = \{X \subseteq G \mid X = a + V,\ V \in \mathcal{B}\}$$

egy bázisa az $a \in G$ tetszőleges elem $\mathcal{V}_a$ teljes környezetrendszerének.

$(G, +, \Omega, \tau)$ topologikus Ω-félcsoport egy Hausdorff tér, akkor és csakis akkor, ha

$$\cap\{V \mid V \in \mathcal{B}\} = \{0\},$$

amennyiben $\mathcal{B}$ egy bázisa zéruselem $\mathcal{V}_0$ teljes környezetrendszerének.

Legyen (G, Ω) egy Ω-algebra. Bármely $\Delta \in \mathcal{B}(I)$, $\Delta \neq \emptyset$ elemre nézve G^Δ algebrai struktúrája (teljes direkt összeg) összeférhető a τ_Δ szorzat topológiájával ([12]). A

$$\mathcal{B}^\Delta = \{f \in G^\Delta \mid f(\nu) \in U_\nu, \nu \in \Delta_\lambda \in \mathcal{B}(\Delta), U_\nu \in \tau\}$$

halmazcsalád egy bázisa a τ_Δ topológiának ([12]).

Legyen $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}^\Delta \mid \Delta \in \mathcal{B}(I)\}$. Akkor $\mathcal{B}$ egy bázisa a $\tau_\mathcal{M}$ topológiának az $\mathcal{M}$ halmaz felett.

Ha $(G, +, \Omega, \tau)$ egy τ-topologikus Ω-csoport, akkor az

$$s : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}, \quad s(f_1, f_2) = f_1 + f_2$$

összeg-függvény és a $h^n_\omega : G^n \to G$,

$$h^n_\omega(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \omega f_1 f_2 \ldots f_n; \quad (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}^n$$

Higgins-függvények folytonosak minden $\omega \in \Omega(n)$ műveletre nézve ([12]).

A fentiek alapján érvényes:

2. tétel.

(a) Ha τ T_2-topológia G felett, akkor $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ egy Hausdorff tér;

(b) Ha (G, τ, Ω) egy τ-topologikus Ω-algebra, akkor $(\mathcal{M}, \Omega, \tau_{\mathcal{M}})$ egy $\tau_{\mathcal{M}}$-topologikus Ω-algebra;

(c) Ha $(G, +, \Omega, \tau)$ egy τ-topologikus Ω-csoport, akkor $(\mathcal{M}, +, \Omega, \tau_{\mathcal{M}})$ egy zérus elemű $\tau_{\mathcal{M}}$-topologikus Ω-félcsoport.

Könyvészet

1. Cohn, P.M., *Universal Algebra.* New York, Harper and Row, 1965.

2. Grätzer, G., *Universal Algebra.* Princeton-New Jersey-Toronto-London-Melbourne, D. van Nostrand Company, 1968.

3. Higgins, P.J., Groups with Multiple Operators, *Proc. London Math. Soc.* 6, 366-416, 1956.

4. Jonsson, B., *Topics in Universal Algebra*, Springer Verlag, 1972.

5. Kuros, A.G., *Lectures on General Algebra*, Chelsea, New-York, 1963.

6. Malcev, A.I., K obščej teorii algebraičeskie sistem, *Mat sb.* 35 (77), 1954.

7. Maurer I. Gy.-Szilágyi M., L'ètude de certaines aplications des grupes munis d'une topologie filtrante. *Atti. Accad. Naz. dei Lincei-Rendiconti*, XLIV, Fasc. 5, 515-522, 1969.

8. Maurer I. Gy.-Szilágyi M., Sur une équation de type Fredholm définie dans des algèbres universelles topologiques, *Rendiconti Ist. di Matem. Univ. Trieste*, vol. III., fasc. II, 1-7, 1971.

9. Maurer I. Gy.-Szilágyi M., Sur Certaines Functions Définies dans des Algèbres universelles, *Mathematica Panonnica*, 6/2, 199-202, 1995,.

10. Pierce, Richard, S., *Introduction to the Theory of Abstract Algebras.* Holt, Rinehard and Winston. New York. Chicago. San Francisco. Atlanta. Dallas. Montreal. Toronto. London, 1968 .

11. Szilágyi M., The Interior Sum in the Category of Topological Groups, *Rendiconti di Mat. Univ. din Roma*, vol. V. seria VI., 463-471, 1972.

12. Szilágyi M., The Summability of the Partial Functions with Values in a Topological Group, *Revue Roum. Math. Pur. Appl.*, Tome XVII, nr.6, 943-957, 1972.

13. Szilágyi M., On Ordered Ω-Groups, *Revue Roum. Math. Pur. Appl.*, Tome XVII, nr.9, 1439-1450, 1972.

14. Szilágyi M., About Some Topology on Universal Algebras, *Matematica*, Vol. 8, „Petru Maior" University Tg. Mureş, 123-126, 2000.

15. Szilágyi M., Study about the Decompositions into Interior Sums in the Category of Groups with Multiple Operators, *„Buletin Ştiinţific" of „Petru Maior" University Tg. Mureş,* 2001.

16. Szilágyi M., Some Properties of the Topological Groups I, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.* fasc. 1, 3-12, 1973.

17. Szilágyi M., Some Properties of the Topological Groups II, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.* fasc. 1, 3-11, 1974.

Szemelvények a Vályi Gyula Matematikai Társaság tevékenységéből

Sebestyén Júlia
Marosvásárhely
Email: sebaj@xnet.ro

Megalakulásának előzményei, indoklása

Mit számít a Te, az Ő,
az én halhatatlanságom –
egyedül küzdelmünk számít
az egyetemes megmaradásért.
Szilágyi Domokos

A gyerekek tudásszintjét évente jelzik a különböző tantárgyversenyek. Elvárásainkhoz és tehetséges gyerekeink számához mérten, kevés magyar gyerek van az élvonalban. Tanári tevékenységünk folyamán kikristályosodtak azok az okok és körülmények amelyek miatt gyerekeink hátrányos helyzetben vannak román társaikhoz képest. Már az I. osztályban kezdődnek a gondok. Érthetetlen a gyerekeknek, miért haragszik a tanci akkor is, ha ők jók; miért kell nekik majdnem naponta egy-egy órával többet maradni az iskolában? Később, a gyerek már érti és érzi annak súlyát, hogy:

– neki eggyel több tantárgyat kell megtanulnia;

– tőle nem csak azt várják el, hogy szépen beszélje hazánk nyelvét, hanem ennek irodalmát és nyelvtanát anyanyelvi szinten kell megtanulnia, éppen úgy, mint a román gyerekeknek;

– de meg kell tanulnia a történelem és földrajz román szaknyelveket is; ez anyanyelvi szinten, a román diáknak is nehéz, annál nagyobb szellemi megerőltetést jelent ezt szótárral tanulni;

– a vizsgák időpontját tervszerűsítő minisztériumi (egykori tanár?) tisztségviselők bizonyára tudják, hogy az emberi szervezet (annál inkább a gyermeké!) a stresszállapotot 48 óra alatt tudja feloldani, ezért van a román nyelv és irodalom valamint a matematika vizsgák között egy szünnap; a magyar gyerek alig tér magához a számára életfontosságú vizsga (hiszen nagyrészt attól függ egész életpályája, hogy melyik líceum, milyen profilú osztályába kerül be a vizsga általánosa alapján) izgalmaitól, robotként esik át három egymás utáni napon a román nyelv és irodalom, magyar irodalom, valamint a matematika vizsgákon; (az ő stresszállapota nem fontos senkinek, de bizonyos százalékban ez is hozzájárul az elvárásoknál gyengébb eredményekhez)

– a családok nagy részében uralkodó szegénység, a munkanélküliség miatti folyamatos elvándorlás, az a tény, hogy a magyar értelmiségieknek a foglalkoztatása szám szerint meg sem közelíti a városok, helységek nemzetiségi

összetételét (legjobb esetben másodrendű polgár, „al-”-ként minősítenek minket), nem nyújt a gyerekeknek egy reményteljes, jövőbe tekintő biztonságérzetet.

A tanulás motivációjának hiányát igazoló fenti érvek a gyerekektől származnak. A tudásvágy ébrentartása, a matematika megszerettetése, a vizsgákra való felkészülés megkönnyítése, a tehetséges gyerekek felkutatása és azok külön foglalkoztatásának vágya késztetett arra, hogy megszervezzünk egy városi szintű kört, melyre a környező falvak gyerekeit is meghívjuk. Ekkor kezdődtek a bajok. Minden kör utáni napon hívatott a román nemzetiségű igazgató és a véletlenül éppen az irodájában tartózkodó volt párttitkár, vagy más régi fontos elvtárs jelenlétében felelősségre vont: Miért gyűlt össze megint annyi idegen magyar tanár és gyerek? Mit csinálunk minden hétfőn délelőtt is és délután is? Mit gondolunk meddig tűrik még a kollégák, hogy zavarjuk őket? Hiába próbáltam megnyugtatni, hogy a matematikai tevékenységet a (magyar nemzetiségű) főigazgató jóváhagyásával és a (román nemzetiségű) szakfelügyelő tudtával tartjuk. Akkor (1990–94), Marosvásárhelyen a 19 általános iskola közül kettőben volt magyar főigazgató. Ma már egyetlen magyar igazgató sincs a város általános iskoláiban. Elvétve itt-ott egy-egy „al-” magyar aligazgató van.

Ezek a körülmények valósággal rákényszerítettek arra, hogy törvényes keretet biztosítsunk a köri tevékenységeknek. Sebestyén Dénes, Sebestyén Júlia és Donáth Árpád kezdeményezésére, 1994. szeptember 28-án, létrehoztuk a *Marosvásárhelyi Gimnáziumi Matematikatanárok Vályi Gyula Társaságát*, mely mostanig az Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT) marosvásárhelyi fiókszervezetének matematika szakosztályaként működött. Életünk folyamán mindent próbálunk jobbá tenni, átalakítani. Így Társaságunkat is átalakítottuk. A marosvásárhelyi törvényszék 5945-ös számú határozata értelmében 2004. november 1-től, *Vályi Gyula Matematikai Társaság – Societatea Matematică Vályi Gyula – Vályi Gyula Mathematical Association* néven működünk.

A névadó: Vályi Gyula

Szinte összeforrott az egyetemmel,
és az egyéniségének annyira megfelelő csendes,
kultúrát árasztó várossal, Kolozsvárral.
...felajánlották számára a budapesti egyetem
katedráját – ő azonban a megtisztelő ajánlatot
visszautasította.

Szénássy Barna

A nagy múltú és nagy tekintélyű erdélyi iskolák számos diákja vált világhírű tudóssá, de egyikben sem nevelkedtek olyan jelentős matematikusok, mint a

közel négy és fél évszázados Marosvásárhelyi Református Kollégiumban (ma Bolyai Farkas Elméleti Líceum). Gondolunk itt a legnagyobb magyar matematikusra, Bolyai Jánosra, valamint a Marosvásárhelyen született nagy matematikusra, Vályi Gyulára.

Marosvásárhely a Bolyaiak városaként ismert. Vályi Gyuláról még a matematika szakos tanárok nagy része sem hallott, pedig Marosvásárhelyen még nem született nála nagyobb matematikus, és Kolozsváron Vályi Gyula volt a Tudományegyetem első erdélyi matematikusa.

A halála óta eltelt évtizedek alatt neve és tevékenysége szinte feledésbe merült. Dr. Weszely Tibor *Vályi Gyula élete és munkássága* című, 1983-ban megjelent könyve az egyetlen, amely a sírfeliraton kívül megörökítette a nagy matematikus és kiváló ember nevét.

Társaságunk azért választotta névadójaként Vályi Gyulát, mert Marosvásárhely szülöttei közül ő a legnagyobb matematikus. Nem minden gyerek végez felsőbb iskolát, de általános iskolába minden gyerek jár. Reméljük, hogy a gyerekeken keresztül a mostani családok és a következő generációk nagy része megismeri, esetleg majd ápolja, vagy továbbadja Vályi Gyula emlékét. Személyiségét példaképként állíthatjuk gyerekeink elé: a szorgalom, az akaraterő győzelme az elháríthatatlan akadályok fölött (elért eredményei a fizikai fogyatékosságai ellenére), a szülőföld szeretete, elődeink tisztelete, hagyományápolás (a Bolyai kultusz létrehozása) és bármely más, az emberi nagyság értékeit tükröző jellemvonásról való beszélgetés során. A Vályi Gyula Emlékversenyeken résztvevő gyerekek is az országban ismertté teszik Vályi Gyula nevét, megőrzik, esetleg tanáraikkal ápolják emlékét.

A Marosvásárhelyi Gimnáziumi Matematikatanárok Vályi Gyula Társasága

Az ember hivatása,
hogy megismerje az igazságot,
szeresse a szépet,
kívánja a jót és cselekedje a legjobbat.
Beethoven

A Vályi Gyula Társaság tevékenysége része a fennmaradásunkért és a jövőbeni erdélyi értelmiség kialakításáért vívott küzdelmünknek.

Tanítványaink hátrányos helyzete, az a tény, hogy sok esetben, azt a kevés IX. osztályt sem tudjuk létrehozni, amit a magyar tagozatnak jóváhagynak, mert nem jutnak be a gyerekeink, arra késztettek, hogy az 1994. szeptember 28-i tanácskozásunkon konkrét tervet dolgozzunk ki a gyerekek megsegítésére. Döntöttünk, és létrehoztuk a Társaságot. A Marosvásárhelyi Gimnáziumi Matematikatanárok Vályi Gyula Társaságának 53 alapító tagja volt. A tagsági díjat fizető, aktív tagok száma mindig 20 körül volt.

1995. február 8-tól az Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság matematika szakosztálya lettünk. Elfogadtuk az Alapszabályzatot, Pénzügyi Szabályzatot, megválasztottuk a szakosztály elnökségét és ellenőrző bizottságát. Az elnökség tagjai: társelnökök Sebestyén Júlia és Donáth Árpád, titkár Petzinger Annamária.

A Társaság tevékenységének célkitűzései:

– a gimnáziumi tanulók ingyenes, folytonos, terv szerinti, iskolán kívüli, hetenkénti felkészítése a Vályi Gyula Matematika Kör keretén belül;

– a magyar matematikai szaknyelv ápolása;

– a gimnáziumi matematikatanárok szakmai továbbképzésének segítése, ismereteik bővítése, szakmai kapcsolataik kiépítése és ápolása;

– az EMT szakosztályaként hozzájárulni és részt venni az EMT által kezdeményezett vagy szervezett tevékenységekben;

– a Matematikai Lapok terjesztése és támogatása;

– Vályi Gyula emlékének ápolása.

Az eltelt tíz év alatt több alkalommal volt tisztújítás a vezetőségben, legutóbb 2003. október 11-én, amikor elnökké választották Sebestyén Júliát, titkárra Székely Endrét, ügyvezetővé Sándor Évát.

Egy évtizednyi tevékenység után Társaságunk nevet és státust változtatott. Önálló jogi személyként, Vályi Gyula Matematikai Társaság néven működik tovább.

A Társaság tevékenységének céljai mindvégig azonosak maradtak. A Vályi Gyula Társaság tagjainak iskolán kívüli állandó tevékenységei közül kiemeljük a következőket:

– A marosvásárhelyi és környéki iskolák V., VI., VII. és VIII. osztályos tanulóinak terv szerinti, heti 2–2 órában való felkészítése a Vályi Gyula Matematika Kör keretén belül. A kör megalakulásától kezdve több mint 2600 óra tevékenységet tartottunk a gyerekekkel. A köri tevékenység eredményeit a Vályi Gyula Emlékversenyeken és más matematika versenyeken mérjük le. Erről külön számolunk be.

– Terjesztjük és támogatjuk a *Matematikai Lapokat*. A feladatmegoldók rovatában megjelenő tanulók számának a növelése érdekében nyilvántartjuk, és évente díjaztuk 2002-ig a Maros megyei 250-300 feladatmegoldók közül azt a 10 tanulót, akik a legtöbb pontszámot érték el. Miután a Matematikai Lapok szerkesztősége díjazással ösztönzi a gyerekeket, azóta a kör évzáró ünnepélyén csak emléklappal és nyilvános dicsérettel, elismeréssel jutalmazzuk a szorgalmasabb feladatmegoldókat.

– A marosvásárhelyi napilap, a *Népújság* szerkesztősége segítségével, 1992 óta évente szervezzük a VIII. osztályos tanulóknak a Matematikai-pályázat nevű megyei szintű vetélkedőt, melynek célja a városi, de főleg a megyeközponttól távol eső falvak gyerekeinek megsegítése a kisérettségire (képességvizsgára) és felvételire való felkészülésben.

– A folytonos szakmai együttműködés és tapasztalatcsere eredményeként feladatlapokat, összefoglaló teszteket, példatárakat készítünk.

– Megkerestük Vályi Gyula sírját a Házsongárdi temetőben és kétmillió lejt adtunk a felújítására. Azért kellett keresni, mert az 1978-as felújítás után, a márványlapot ledöntötték, a felirattal lefele, a sírt benőtte a gaz, a kerítést megrongálták, és így nem hasonlított az ismert sírra. Több évig tartó, többszöri Kolozsvárra utazással járó keresés után, térkép és Tőkés Erzsébet (a Házsongárdi Alapítvány igazgatója) segítségével 2002. májusában találtuk meg a sírt, a Radó Ferenc Emlékversenyen résztvevő Vályi Gyula köri tanulókkal. Örülünk, hogy hozzájárulhattunk a sír felújításához, amely most elfogadható állapotban várja a kegyeletüket leróni óhajtó látogatókat.

A Vályi Gyula Matematikai Kör

Minden nép annyit ér, amennyi
értéket saját magából ki tud termelni.
S addig él, amíg életét a saját erejével
tudja táplálni.
Márton Áron

A köri tevékenységet a Vályi Gyula Társaság tagjai tartják, így a kör a Vályi Gyula matematika kör nevet kapta. A köri tevékenység a tanulóknak ingyenes, a tanároknak önkéntes jellegű, mivel munkájukért nem kapnak fizetést semmilyen formában.

A gyerekek tudásszintjének emelésén kívül célunk a tudásvágy céltudatos ébrentartása, a tehetséges gyerekek felkutatása és azok külön foglalkoztatása, a marosvásárhelyi és környékbeli iskolák matematikát kedvelő gyerekeinek ismerkedése, a közös munkán, közös ismeretfelmérőkön, közös szórakozásokon való részvétel által az együvé tartozás gondolatának és érzésének ápolása, valamint a két Bolyai mellett, városunk nagy szülötte, Vályi Gyula emlékének megőrzése.

Marosvásárhely általános iskoláinak tanulóin kívül járnak a körre Gernyeszeg, Maroskeresztúr, Koronka, Nagyernye, Mezőcsávás, Jobbágytelke, Szentanna, Marosszentgyörgy, Nyárádtő és más környékbeli falvak iskoláinak matematikát kedvelő gyerekei is.

A felkészítőket előzetes terv alapján, a tantervnek megfelelő ütemben, osztályonként, heti tevékenységeken tartjuk. Az osztályvezető tanárok ismeretfelmérő dolgozatok alapján egész éven át követik a gyerekek tudásszintjének alakulását. Év végén a legjobb eredményt elérő tanulók oklevelet, emléklapot, könyv- és tanfelszerelés jutalmat kapnak. A tevékenység eredményességét tükrözik évente a köri tanulóknak a Vályi Gyula Emlékversenyen, a kolozsvári Radó Ferenc Emlékversenyen és más matematika versenyeken elért szép eredményei.

Az 1995–1996-os tanévben, a nagy távolság miatt és az idővesztés elkerülése érdekében, Marosvásárhelyen a Tudor lakótelepen Mánya Béla tanár a VII. és VIII. osztálynak, Nyárádszeredában (ahonnan télen nagyon nehéz volt hetente behozni a gyerekeket) Csipán Ilona, Kovács Irma és Papp Teréz tanárnők a VI., VII. és VIII. osztályos tanulóknak „fiók" Vályi Gyula matematika köröket létesítettek, amelyek azóta sikerrel működnek.

A Vályi Gyula Emlékversenyek

A matematikai tehetség éppúgy, mint a
zenei – amelyek gyakran együtt járnak
– már zsenge fiatal korban megnyilvánul.
E. Dubois-Reymond

A Vályi Gyula Matematikai Társaság név és jogi státus változtatása, valamint egy évtizedes léte, jó alkalom a tevékenységek elemzésére és újraértékelésére. A Vályi Gyula matematika kör egész évi tevékenységeit a baráti versenyszellem jellemzi. A városi és környékbeli (vidéki) tanulók között kialakult barátságok, a kellemes hangulat és az együvé tartozás eszméje érlelte meg bennünk a Vályi Gyula emlékversenyek szervezésének gondolatát. Kevés magyar gyerek, és a szórványvidékről még kevesebb jut el a tantárgyversenyek különböző szakaszaira. A Vályi Gyula emlékverseny sikerélményt akar nyújtani a matematikát kedvelő magyar gyerekeknek is.

Az emlékversenyek célkitűzései:

– a tanulók tudásszintjének felmérése, a kisérettségire (képességvizsgára), felvételire való felkészítése;

– a magyar közösségben és a „szórvány"-ban élő gyerekek és tanárok ismerkedése, barátkozása, az együvé tartozás eszméjének ápolása;

– Marosvásárhely nevezetességeinek és neves személyiségeinek megismerése;

– Vályi Gyula emlékének ápolása.

A versenyre meghívás alapján jönnek a vendégcsapatok. A helységek (csapatok) kiválasztásának három feltétele van:

– a vendégcsapatok egy része komoly matematikai felkészítést nyújtó iskolát, várost vagy közösséget képviseljen, ezzel biztosítva a verseny rangját;

– a másik rész az elszigetelten, „szórványban" élő gyerekek köréből legyen, mivel e verseny is egyik lehetősége az elszigeteltség feloldásának, az együvé tartozás konkrét megnyilvánulásának;

– az anyagi támogatók segítsége, e „hatalom", melytől a vendégek létszáma függ!

Az emlékversenyen résztvevő gyerekek kiválasztása a meghívott kör, város vagy iskola feladata. A verseny nyitott minden V., VI., VII., VIII. osztályos tanuló számára, függetlenül bármely kritérium szerinti hovátartozásától. Bárki jelentkezhet, ha részt óhajt venni. Anyagi támogatóink függvényében minden

gyereket szívesen látunk, aki vállalja a megmérettetést és ezt az óhaját időben bejelenti.

Az eltelt tíz év emlékversenyeit értékelve, azok szervezésében három időszakot különíthetünk el:

– 1994–1996 – két versenyt szerveztünk, amelyeken csak Maros megyei gyerekek vettek részt;

– 1996–2000 – négy verseny volt, melyekre az ország különböző megyéiből, főleg Erdélyből hívtunk vendégeket;

– 2000–2004 – a négy versenyen a hazai vendégeken kívül a testvérváros Kecskemét tanulóit is vendégül láttuk.

Elkövettük azt a hibát, hogy a versenyeket csak akkor kezdtük számozni, amikor Maros megyén kívüli meghívottjaink is voltak. Ezek a versenyek sem egységesek a vendégeket illetően, mert négy emlékverseny után már külföldi vendégeink is vannak. Ezért az emlékversenyeket újraértékelve, egységesen, az elsőtől számozzuk.

A 2000–2001-es tanévtől kezdődően kecskeméti diákokkal bővült a versenyzők köre.

A Millennium évében, még inkább mint máskor, kerestük helyünket az egyetemes művelődéstörténetben. Kegyelettel és tisztelettel vettük számba azokat a személyiségeket akiknek köszönhetően a honalapítás után népünk részesévé vált az európai kultúra megteremtésének. Minden lehető alkalommal tudatosítjuk tanítványainkban Nemeskürty István mindenkor érvényes gondolatát: „A múltat nem lehet tőlünk elvenni, de az csak akkor a mienk, ha ismerjük.” Ennek jegyében tartott Balás Árpád tanár vetítéssel egybekötött előadást Marosvásárhely kultúrtörténetéről és tudós személyiségeiről

A 2001–2002-es tanévben, 2001 november 23–25-én tartottuk a VIII. (VI.) emlékversenyt.

A 2002–2003-as tanévben 2002. december 13–15-én, Bolyai János születésének 200. évfordulóján tartottuk a IX. (VII.) emlékversenyt.

A Bolyai Farkas Líceumban tartott megnyitón Fodor Imre alpolgármester a matematika tanulásának és a versenyeken való részvételnek a fontosságáról, valamint Bolyai János tevékenységének jelentőségéről tartott előadást. A vendégek és vendéglátók megtekintették:

– a Köteles Sámuel utcában a Molter Károly író házán levő emléktáblát, és próbálták képzeletben a helyére illeszteni a házat, amelyben két éves korától felnőtt Bolyai János, és amely sajnos már csak képen látható;

– a Bolyai Farkas Líceumot és az előtte levő téren az Izsák Márton és Csorvássy István szobrászművészek által alkotott, 1957-ben leleplezett Bolyai Farkas és Bolyai János kőszobrot;

– az 1802-ben megnyílt Teleki Tékát és a Bolyai múzeumot;

– a Bolyai- sírokat, és megkoszorúzták a Bolyai János sírját;

– a Bolyai János háza helyén levő ház falán az emléktáblát, és virágot helyeztek oda.

Útban a háromnapos rendezvénynek helyt adó „házigazda” 7-es számú Általános Iskolához, kegyelettel adóztak még:

– Kőrösi Csoma Sándor (1784–1842) emlékének, az 1940-es évek elején Dabóczi Mihály szobrászművész alkotta szobornál;

– és a Székely Vértanúk, az 1854. március 10-én a volt postaréten kivégzett Bágyi Török János a Református Kollégium tanára (47 éves), Martonosi Gálfi Mihály ügyvéd, volt szolgabíró (32 éves) és Nagyváradi Horváth Károly földbirtokos (25 éves) áldozatok emlékművénél.

A IX. Emlékverseny bővelkedett versenyekben is. A versenyeken összesen 146 tanuló vett részt. A matematika versenyen kívül „Ki tud többet Bolyai Jánosról?” témával rendezett vetélkedőn 9 vendégcsapat és 8 marosvásárhelyi csapat, összesen 51 tanuló versenyzett. A záróünnepélyen dr. Kiss Elemér akadémikus, Bolyai kutató (Sapientia EMTE)) és dr. Varga Csaba (Babeş-Bolyai TE) Bolyai Jánost és apját, Bolyai Farkast valamint a geometriát méltató előadásai után a tanulók díjazása következett.

A 2003–2004-es tanévben 2003. november 28–30-án rendeztük az X. (VIII.) emlékversenyt, Vályi Gyula halálának 90. évfordulója jegyében.

Az emlékverseny keretében, az évforduló alkalmából vetélkedőt tartottunk: „Vályi Gyula élete és munkássága” címmel. Az ünnepélyes díjkiosztáson dr.Weszely Tibor (tudomásunk szerint) az egyetlen Vályi Gyula életéről megjelent könyv szerzője tartott előadást a Vályi családról.

Visszajelzések

. . . egy maga idejében esett mag
a késő vénségig terem . . .
Bolyai Farkas

Rendszerint a versenyek után a vendégek egy részétől kedves köszönő leveleket, ünnepekre képeslapokat kapunk. Mivel tanítványaink további útját figyelemmel kísérjük és tartjuk velük a kapcsolatot, gyakran kapunk tőlük kellemes visszaemlékező sorokat a boldog gyerekkorról. Az alábbiakban levelekből idézünk:

Mi, a „szórvány”

Már megszoktuk, mi, zsilvölgyi magyarok (székelyek, bihariak, szilágyságiak stb.), hogy ezt a minősítést elfogadjuk, sőt élni tudjunk benne! Mert, hej! volt ez másképp is. Középiskolánk, párhuzamos osztályaink, kiváló tanulóink! Hálás közönsége voltunk az idelátogató színházaknak. . . Mára csak a bölcsesség mondatja, velünk, itt élőkkel: o tempora, o mores. . .

Az évtized eleje óta alázattal meghajtott fővel viseljük a TV, a sajtó megalázó pecsétjét a bányászlátogatások miatt. Tagadhatatlan a cinikus „vigasz” a közelmúlt brassói eseményei láttán: lám-lám. . .

És ilyen helyzetben, hangulatban érkezett a meghívó Marosvásárhelyről! A VÁLYI GYULA emlékversenyre! Nekünk!!! Felfedeztek bennünket, meghívtak! Minket is, nemcsak a csángókat! Tudnak rólunk, legalább is sejtik az enklávében, hogy még létezünk!

És mentünk öt tanulóval, egy egész osztállyal! Még nem versenyezni, csak ismerkedni, részt venni, önértékelési zavarunkat gyógyítani. Jólesett a kedves meglepetés már az érkezéskor! Bota Edit, fiatal anyuka várt minket és a lugosiakat. Úgy fogadott mint távoli rokonait! A három napos rendezvény alatt végtelenül sok szeretetet tapasztaltunk. A fiatal szülők jelenlétét mindenütt! A 7-es Ált. Iskola igazgatósága egész tanári kara – mintha csak matematikusokból állt volna! Szépen összekovácsolódott az a matematikai társaság, amely a még aktív tanári közösségből nem felejtette ki a már nyugalmazott kollégákat ! Mert tudják, hogy a „hála – a legnagyobb műveltség!"

Megköszönjük azt a sok kellemes eseményt, amiben részünk lehetett! A városlátogatás, a szülői munkaközösség áldozatát, a „sponzorizálás" minden fokát, amely az anyagi feltételeket biztosította.

Köszönet illeti Dan Ioan igazgató urat a Faipari Líceum vezetőségét, személyzetét, amiért szállást biztosított számunkra. Most mondják a gyerekek:

– És tanárnő, tessék megírni, hogy Júlia tanárnő mosolyára, szerető gondoskodására mindig emlékezni fogunk! S végül minden tiszteletünk a kiváló matekosoké, de aki nem az? Ezért a szervezők figyelmébe ajánlanánk szerény javaslatunkat: legyen az V. emlékverseny egy kicsit könnyebb, játékosabb vetélkedő!

Ha élve megérjük a 2000. évet – miért ne játszanánk matematikát egy cseppet? Hiszen – olvasom a minap, hogy „Newton binomiális elmélete is van olyan szép, mint a Milói Vénusz – csak kevés embert érdekel!"

Hátha több tanuló fedezi fel egy játékos versenyen a logikus gondolkodás, a gyors felfogó képesség, a figyelem stb., áldásait a gyakorlatban is... hisz nem lesz a világ csak az informatikusoké?

P.S. A fiam szerint de igen!

Tisztelettel, köszönettel a petrillai 6-os sz. Ált. Isk. tanulói nevében,

Bács Erzsébet és Pop Erzsébet nyelvszakosok

Gondolatok a Vályi Gyula emlékére

Előttem áll egy kép, rajta egy hölgy, könnybelábadt szemekkel, és egy gyermek. A büszke tanító és tanítványa a Vályi Gyula emlékverseny díjosztó ünnepsége után. Az emléklapon dicséret. Ez az a pillanat, ami előtör az emlékeim közül, ha bárhol és bármikor meghallom Vályi Gyula nevét. És történt mindez 10 évvel ezelőtt. Ezt követően váltam a Vályi Gyula matematika kör által éves rendszerességgel rendezett emlékverseny állandó résztvevőjévé. A következő két évben szintén díjjal távoztam, tisztelegve a Bolyaik városának matematikusai előtt.

Ha visszatekintek az életpályámra, azt kell mondanom, a matematika igenis meghatározó szerepet töltött be az életemben. Kétszer is választhattam, hogy folytatom ezen az úton, vagy egészen másra térek, de, aki érezte, már tudja, aki nem, az majd érezni fogja, hogy, ha megszereti a matematika világát, akkor soha többé nem mond le erről a tudományról, hisz kulcs ez színes világunk titkaihoz. Idegenkedve fogadtam a gondolatot, hogy a matematika a mai világunk alaptantárgya, és az informatika, a gépek, a formák elképzelhetetlenek matematika nélkül, de mára már megértően nézek, és hálával gondolok azokra a tanárokra, akik tanították nekem a matematikát, és a számok világának szépségeit ismertették meg velem. Azóta jeles eredményekkel végeztem a Bolyai Farkas Elméleti Líceum informatika osztályában és most két egyetemen és egy kollégiumban bővíthetem tudásvilágomat. A Sapientia – Erdélyi Magyar Tudományegyetem harmadéves számítástechnika szakos hallgatója, a Dimitrie Cantemir szintén harmadéves jogászhallgatója, valamint a magyarországi Bethlen Gábor Politikai Kollégium hallgatója vagyok.

Ha azt kérdezik, hogy a marosvásárhelyi Vályi Gyula matematikai műhely meghatározta-e a jövőmet, akkor büszkén mondok igent, sőt elősegítette. Az ifjak tehetségének felmérését továbbra is segíteni kell, és, hogy ezek emlékversenyek, vagy tudományos diákköri konferenciák, az már részletkérdés. És bár ezeknek a rendezvényeknek a főszereplői a diákok, megkülönböztetett tisztelet és elismerés illeti azokat az oktatókat, akik önzetlen segítséget nyújtanak nekik.

Kali István, egyetemi hallgató,
egykori diákja a Vályi Gyula matematika körnek

Kedves Jutka néni!

Habár több mint öt éve múlt, hogy részt vettem a Vályi Gyula kör felkészítőin, hatását még mindig érzem. Jelenleg számítástechnikát tanulok másodévesként a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetemen, és elmondhatom, hogy nagyon sokat köszönhetek annak, hogy annak idején vállaltam a versenyekre való felkészüléssel járó munkát.

Ami szerintem a konkrét ismeretek elsajátításánál is fontosabb, az magának az egyéni gondolkodásmódnak a kialakulása, és annak a felismerése, hogy körülöttünk a világ tele van felfedezésre váró csodákkal.

Mivel az ember általában nem tizenkét éves korban választ mesterséget, úgy érzem, hogy matekkörön részt venni és versenyekre járni annak is megéri,akinek később egészen más lesz a szakterülete, ugyanis megtanul gondolkozni,és így rájön arra, hogy vannak kérdések, melyekre ő is válaszolni tud.

Nagyon örvendek annak, hogy vannak még lelkes tanárok, akik vállalják, hogy a kötelező tananyagon felül valami többet is nyújtsanak a diákoknak.

A 8. osztály utáni eredményeim közül, említésre érdemes:

– háromszor kijutottam a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny döntőjére (IX., X., XI. oszt.)

– 2002. Tudományos Diákkörök Erdélyi Konferenciáján I. díj

– 2002-ben tagja lettem a középiskolai Kutató Diákok Országos Szövetségének és a Bolyai Műhelynek

– 2004-ben a Tudományos Diákkörök Országos Konferenciáján, Szegeden, különdíjat kaptam.

Ezeken kívül még voltak eredményeim kisebb versenyeken, Olimpiászokon.

Köszönettel: Vita Szabolcs

Kedves Tanárnő!

Számomra a Vályi Gyula matematika kör nem csupán szakmai, hanem szemlélet-módbeli élményekkel is szolgált. Radikálisan újragondolhattam (és újra kellett gondolnom) helyemet és képességeimet egy nagyobb, másféle közösségben, mint amelyhez azelőtt bármikor is tartoztam. Alázatot tanulni-, csendes, belső alázatot, amely nem csupán kifele kommunikált póz, hanem bármiféle szakmai és emberi önérvényesülés alapfeltétele. Köszönök mindent amit értem tetszett tenni.

Üdvözlettel: Görög Levente

Marosvásárhely, 2004. 06. 28.

Görög Levente lakcíme: Ikland 66 szám. Ikland egy kis falú Marosvásárhelytől kb. 15–18 km-re. Levente itt végezte az I–IV., majd a nagyernyei iskolában az V–VIII. osztályt. VI. osztályos korában lett Vályi Gyula köri tag és már akkor kitűnt tehetségével, szorgalmával, jó magaviseletével. 1998-ban búcsúzott a Vályi Gyula Körtől. A Bolyai Farkas Líceumban érettségizett. A Sapientia EMT Műszaki Karán, az automatizálás szakon III. éves és a Babeş-Bolyai Tudományegyetem közgazdaságtan karán II. éves hallgató. VI. osztályos kora óta több mint 25 díjban részesült, és 4 publikációja jelent meg. A sok díj közül talán a legjobban a 2004-ben a HPGBC (Hewlett-Packard Global Business Challenge) alkalmazott közgazdaságtan verseny nemzetközi döntőjén, Houstonban, TX, USA, nyert III. díjnak örült. A HPGBC verseny nemzetközi döntőjén, Houstonban, a Vályi Gyula Kör egy másik díjazottja, Petz Erika is részt vett a Bolyai Farkas Líceum képviseletében és a VI. helyezést érte el.

Görög Leventének angol felsőfokú és német középfokú nyelvismerete komoly segítség az információ és kommunikáció tekintetében.

A Vályi Gyula Matematikai Társaság tanárai vallják Bolyai Farkas másfél évszázaddal ezelőtti intelmeinek időszerűségét, amely szerint: „. . . a tudás kívánása eredeti vágy a lélekben, csak fel kell serkenteni. . . fejteni kell azt, ami van, s önként fejlődik a mag, csak napfény és eső legyen . . . ” Örömmel tölt el és további munkára ösztönöz, ha tanítványaink kimagasló eredményeket érnek el, és úgy érzik, hogy ehhez mi is hozzájárultunk.

A Vályi Gyula Emlékév

...nőttön nő tiszta fénye,
Amint időben és térben távozik.
Arany János

Vályi Gyulának, sajnos sem Marosvásárhelyen, ahol született és 12 éven át diákja volt a Református Kollégiumnak, sem Kolozsváron, ahol egyetemi tanárként élt, alkotott és nyugszik nincs szobor, tér, utca vagy iskola de még egy dombormű sem, mely megörökítené a nevét. Miért? Meddig? Mivel tisztelgünk emlékének születése 150. évfordulóján? Ez is része a megmaradásunkért való küzdelemnek. Ha nem tiszteljük neves elődeinket, nem lesz jövőnk. Múltunk az az alap, amire építenünk kell itthon maradt gyermekeink és unokáink jövőjét. Szép hazánkban egymást érik a megemlékező, ünneplő tevékenységek. Ez a kulturált utókor nemes, értékelendő gesztusa. Annyi emlékállítás, névadás, ünneplés közepette, ami arra érdemes, de Marosvásárhelyhez vagy Kolozsvárhoz nem kötődő személyiségeknek jár ki, nem lehetne emléket állítani, névadó ünnepélyt tartani, szobrot, domborművet avatni Erdély szülöttének is, aki a matematika tudományok doktora, a Magyar Tudományos Akadémia tagja volt?

Mi, a Vályi Gyula Matematikai Társaság tagjai szeretnénk, ha születésének 150. évfordulóját nem csak megemlékező gyűlésekkel, hanem a kiváló tudós és professzor, a nemeslelkű ember nagyságának kijáró tisztelettel ünnepelnénk, abban a tudatban, hogy tettünk valamit városaink e személyisége emlékének, nevének fennmaradásáért. A fenti kérdések és gondolatok késztettek arra, hogy nyilvánítsuk a 2004. október 1 – 2005. október 1 időszakot Vályi Gyula emlékévvé.

Az emlékév tevékenységeit a következő előzetes terv szerint szervezzük:

2004. szeptember 30-án 17 órakor

– Az emlékév megnyitója

– A Vályi Gyula matematika kör megnyitója

Helyszín: a marosvásárhelyi 7-es számú Általános Iskola

2004. október 9.–2005. június 1.

– A Vályi Gyula matematika kör tevékenysége, a marosvásárhelyi és környéki V–VIII. osztályos tanulók részére (minden szombaton 8-tól 10 óráig), a marosvásárhelyi 7-es és 14-es sz. Általános Iskolákban

2004. november 12–14.

– részvétel a kolozsvári Vályi Gyula Emlékkonferencián

Helyszín: az EME kolozsvári székháza

– Koszorúzás Vályi Gyula sírjánál a kolozsvári Házsongárdi temetőben

2004. november 19–21.

– A XI. Vályi Gyula matematika emlékverseny

Helyszín: a marosvásárhelyi 7-es számú Általános Iskola

2005. január 25.

– Vályi Gyula tudományos emlékkonferencia

Helyszín : Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

– Emléktábla-avatás a Bolyai Farkas Líceumban

2005. május

– Vályi Gyula szoborának felavatása

– a Vályi Gyula Matematika Kör évzárója

2005. október 1.

– A Vályi Gyula emlékév ünnepélyes zárása

A tervben foglaltakat eddig sikerült időben megvalósítani. A Vályi Gyula matematikakör működik. Minden szombaton készítjük a gyerekeket a versenyekre. Részt vettünk a kolozsvári Emlékkonferencián, megkoszorúztuk a Vályi Gyula sírját. Sajnos a sírt meggyalázták azzal, hogy a 2004. november 12-én délután 4 órakor a sírra helyezett koszorú, másnap, 13-án délben felismerhetetlen volt. A virágokat egytől-egyig leszakították a koszorúról, a fenyőágakat, amelyekre a virágok voltak rátűzve, széttépték. A szétmarcangolt koszorút megfordítva, a kegyeleti szalagokkal a földre, a koszorú tartólábaival az égnek állva, a kerítésre dobták.

2004. november 19-21-én megtartottuk az emlékversenyt. A Vályi Gyula emlékév keretén belül rendezett XI. Vályi Gyula emlékversenyen összesen 294 tanuló versenyzett Barót, Bethlen, Brassó, Csíkszereda, Gyergyószentmiklós, Gyimesbükk, Kecskemét, Kézdivásárhely, Kolozsvár, Medgyes, Nagyvárad, Szatmárnémeti, Szászrégen, Nyárádszereda, Küküllőszéplak, Dózsa György, Maroskeresztúr, Mezőmadaras, Sáromberke és Marosvásárhely iskoláiból.

Vályi Gyula születésének 150. évfordulóján, 2005. január 25-én emlékünnepélyt tartottunk a Bolyai Farkas Elméleti Líceumban, az egykori Református Kollégiumban, ahol 12 évig volt diák.

Az emlékünnepély első részében lelepleztük Vályi Gyula emléktábláját annak a régi épületnek a falán, amelyben Vályi Gyula tanult. A történelminek nevezhető esemény jelentőségét növelte az a tény, hogy halála óta, vagyis 91 éve ez az első alkalom, amikor városunk e neves szülötte nevét megörökítettük.

A 60 cm×80 cm-es domborműves bronztáblát a Vályi Gyula Matematikai Társaság csináltatta. Kivitelezői: Hunyadi László, Kiss Levente és Balogh József. Az ünnepi eseményen részt vettek meghívottak Magyarországról, Kolozsvárról, Csíkszeredából, Székelyudvarhelyről és Marosvásárhely polgárai valamint diákok.

Az emlékünnepély második részében, az emlékkonferencián Vályi Gyula életéről és tevékenységéről tartottak méltató előadásokat: dr. Kolumbán József akadémikus, dr. Kása Zoltán, dr. Bege Antal, dr. Oláh-Gál Róbert, a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem képviseletében, Staar Gyula a *Természet Világa* főszerkesztője és Herczeg János az *Élet és Tudomány* főszerkesztője Budapestről, dr. Kiss Elemér akadémikus, dr. Weszely Tibor a Sapientia

EMTE részéről, és Berger György tanár. A Vályi Gyula Matematikai Társaság részéről Sebestyén Júlia értekezett.

A Vályi Gyula-emléktábla leleplezése a Bolyai Farkas Líceum udvarán

Az emlékünnepély utolsó részében a régi és mostani Vályi Gyula körös diákok fejezték ki hódolatukat a nagy matematikus emléke előtt egy rövid műsorral, amelyben elhangzottak: Kányádi Sándor *Nóé bárkája felé*, Áprily Lajos *Pisztrángok kara*, Szilágyi Domokos *Magyarok*, Wass Albert *A láthatatlan lobogó* című versek és F. Schubert *A pisztráng*, Enescu *Román rapszódia*, Pleyel: *Hegedűduó* és Beethoven *Örömóda* című művek.

Adjon az Isten mindnyájunknak erőt, egészséget, hogy az emlékévbe tervszerűsített többi tevékenységet is meg tudjuk valósítani.

Marosvásárhely, 2005. január.

Ebben a házban lakott Vályi Gyula élete utolsó éveiben
Kolozsvár, Majális utca 20.

Vályi Gyula sírja a Házsongárdi temetőben

Proceedings of the Gyula Vályi Memorial Conference

November 11–12, 2004

ABSTRACTS OF THE PAPERS

Tibor WESZELY: Gyula Vályi's Life and Activity

The paper deals with the Gyula Vályi's life and scientific activity. Gyula Vályi (1855–1913) was a famous mathematician of the University in Kolozsvár between 1881–1911.

Tibor WESZELY: Gyula Vályi's Work in Projevtive Geometry

The paper deals with the Gyula Vályi's scientific activity in projective geometry.

Antal BEGE: Gyula Vályi's Work on Differential Equations

The paper deals with the Gyula Vályi's scientific activity on differential equations.

Róbert OLÁH-GÁL: Contribution to the Research of Gyula Vályi's Activity

In this paper we deal with three themes related to the research of Gyula Vályi's (1855–1913) life and activity:

Firstly we draw the genealogical tree of Dósa family and we show the relationship between the Vályi and the Dósa families. Gyula Vályi (1855–1913) was a famous Hungarian mathematician and professor at the University in Kolozsvár. His mother was a descendent of the nobleman György Dózsa (1470-1514), a peasant revolt against the Hungarian nobility. After the defeat of the army György Dózsa was executed.

Second we deal with the establishing of the place of the house where Gyula Vályi (1855–1913) was born in Marosvásárhely.

Finally. we give a Maple program to illustrate that the tetrahedral altitudes are on the hyperboloid with one gown, according to Vályi's theorem.

József SÁNDOR: Gyula Vályi's Activity in Number Theory

By presenting the main problems and ideas of Gyula Vályi in Number Theory, we study many related results (without proofs) suggested by his papers, which have been published and/or are under publication. Some historical facts on the priority of Vályi's results, as well as some open problems are pointed out, too.

Elemér KISS–József SÁNDOR: Variations on a Theme by Bolyai

By studying a theorem on pseudoprimes (the so called *Bolyai-Jeans theorem*), János Bolyai discovered also some particular cases of the congruence (3) (*see* page 41). We prove characterizations and generalizations of this relation, by using Euler's theorem and its extension given by Hanson. Connections with Wieferich primes, as well as Fermat quotients, are pointed out, too.

Antal BEGE–Péter-István FÜLÖP: On a Conjecture of Schinzel

In this paper we state some results concerning a conjecture of Schinzel according to which all positive integers are representable in the form $\dfrac{p+1}{q+1}$, where p and q are prime numbers.

Sándor HORVÁTH: A Characterization of Frobenius Form of Matrices

The paper gives conditions on matrix entries for a given matrix to have a particular canonical – Frobenius or Jordan – cell structure.

To establish such conditions it uses Gröbner bases. It is interesting that by this method the usual ingredients – like eigenvalues, eigenvectors, characteristic polynomial, invariant subspaces and so on – are completely avoided. The method is size independent, however it can be applied effectively only in small dimensions due to the computational complexity of the Gröbner bases algorithm.

Further studies are necessary to investigate how far these conditions are from the sufficient one. Examples are known for each of the cases, when the conditions obtained by this method are also sufficient and when they are not.

Let as repeat here just one of the theorems of the paper (5. thm *see* page 56), to figure out the flavor of this kind of results.

Theorem *Let*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 00r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} \text{ and } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^3 \\ 1 & 0 & 3\lambda^2 \\ 0 & 1 & -3\lambda \end{pmatrix}.$$

be matrices having complex entries. If F is the Frobenius form of A then

$$
\begin{aligned}
lrrx^2 + 3yr - xs + s^2 + 3zu + 3tv - xw - sw + w^2 &= 0 \\
\\
9xyr + 10x^2s + 66yrs - 28xs^2 + 19s^3 + & \\
+9xzu - 15zsu + 81ytu + 81zrv - 72xtv + & \\
+66stv - 85x^2w - 300yrw + 111xsw - 104s^2w - & \\
-219zuw - 219tvw + 67xw^2 + 86sw^2 - 76w^3 &= 0 \\
\\
27y^2r^2 - 10x^3s - 75xyrs + 28x^2s^2 + & \\
+9yrs^2 - 19xs^3 - 9x^2zu + 27yzru + & \\
+15xzsu - 81xytu - 81xzrv + 72x^2tv + & \\
+27yrtv - 66xstv + 85x^3w + 291xyrw - & \\
-111x^2sw - 9yrsw + 104xs^2w + & \\
+219xzuw + 219xtvw - 67x^2w^2 + & \\
+9yrw^2 - 86xsw^2 + 76xw^3 &= 0.
\end{aligned}
$$

The proof can be found in the paper's body, and it is based on a program written by us in Singular, a powerful computer algebra software, available free of charge on the Internet (*see* [3] page 59).

Zoltán KÁSA: Complexity of the Finite and Infinite Words

Different complexity measures of finite and infinite words (e.g. the number of subwords) are resumed. The main results are presented without proofs, mainly from author's papers. Beginning with a conjecture (*see* [3] page 70) that says:

> *In the De Bruijn graph $B(q,k)$ for $q > 2$ and $k > 1$ the number of arc-disjoint Hamiltonian cycles is $q - 1$,*

a new conjecture is formulated:

> *In the De Bruijn graph $B(q,k)$ for $q > 2$ and $k > 1$ there exists a Hamiltonian cycle H_0 that together with the Hamiltonian cycles $H_1, H_2, \ldots, H_{q-2}$ (obtained from H_0 by using the permutations p_k, $k = 1, 2, \ldots, q-2$) are arc-disjoint Hamiltonian cycles.*

Circular permutations p_k ($k = 1, 2, \ldots q-2$) of nonzero letters in the de Bruijn word (which correspond to a De Bruijn graph) are defined as

$$
\begin{aligned}
p_k(i) &:= (i+k) \bmod q + (i+k) \operatorname{div} q, \quad i = 1, 2 \ldots q-1 \\
p_k(0) &:= 0.
\end{aligned}
$$

Sándor KISS: The Canonical Form of the Equations of the Conics

In this paper we will study how the standard (canonical) form of the equations of the conic sections (conics) change on choosing as their frame of references the frame of references built on the supportline of their conjugated diameters or on the asymptotes in the case of the hyperbola. We will show, that the equations of the conic sections in the frame of reference based on their conjugated directions suits formally with the canonical equations, which are in fact one particular case of the former. Since the symmetry axes of the conics represents perpendicular conjugated directions. After that it will be shown that the equations of the tangents of the conics in the frame of references based on conjugated directions are given from the so called doublational method, too. Finally we will proof some properties related on conics using equations written in one of the oblique coordinate system, in order to show that the proof essential can be simplified.

Zoltán MAKŐ–Ferenc SZENKOVITS–Edit GARDA-MÁTYÁS: Eccentric Anomaly Determination with Artificial Neural Network

The position of a planet calculated by solving Kepler's equation is only an approximation of the real position. This is a consequence of the fact that the Newtonian two-body problem does not take into consideration the different perturbations. If perturbation effects are build in the Newtonian two-body problem then the computation of planet's position will be very complicated, and Kepler's equation widens with perturbation terms. In this case the Kepler's equation may be considered to characterize a noisy two-body problem. This problem can be modeled with artificial neural network.

In this paper we make an attempt to determine a better approximation of the position of a planet on its orbit, by using a multilayer feedforward network. Using the weights and biases of trained network we give an explicit formula that relate the eccentric anomaly E to the mean anomaly M and the orbital eccentricity e. This formula gives at the any time an approximate solution of Kepler's equation with perturbation terms.

Keywords: Kepler equation, neural network
Classifcation: 70F05, 68T05

Károly SIMON: Dynamic Clustering with Genetic Algorithms

Evolutionary algorithms can be successfully used for solving multi-modal optimization problems. Inspired from Computational Physics a new Link-Cell-based method is proposed. The Link-Cell technique is combined with a recently proposed evolutionary search and multi-modal optimization meta-heuristics - called Genetic Chromodynamics (GC). In this way a new evolutionary multi-modal optimization model is obtained. This model is used to derive

a new dynamic clustering method (GCDC), improved with parameter adaptation techniques. The GCDC algorithm is used for solving several practical problems. Some numerical experiments are also described.

Róbert SZÁSZ–László Róbert ALBERT: On a Starlikeness Condition

Let A denote the class of functions which are analytic in the unit disc $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and have the form $f(z) = z + \sum_{n=z}^{\infty} a_n z^n$. For $\alpha > 0$ let R_α be the subclass of A defined by

$$R_\alpha = \Big\{ f \in A : \mathrm{Re}(f'(z) + \alpha z f''(z)) > 0, z \in U \Big\}.$$

It is easy to prove that if $\alpha > \beta > 0$ then $R_\alpha \subset R_\beta$. In [2] (*see* page 108) P.T. Mocanu has proved that $R_{1/2} \subset S^*$ where

$$S^* = \left\{ f \in A : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, z \in \mathcal{C} \right\}$$

is the well known class of starlike functions. The same author has proved in [3] (*see* page 108) that $R_\alpha \subset S^*$ for $\alpha \geq 0,348$. In this paper we improves this result, showing that $R_\alpha \subset S^*$ for $\alpha \geq \frac{1}{7} > 0,142$.

Miklós SZILÁGYI: The Topological Ω-Algebra of Partial Functions

The present work studies the algebraic and the topological structures of the partial functions, that is, of the functions defined on subset of an arbitrary set, with values in a topological Ω-algebra.

Júlia SEBESTYÉN: On the Activity of Gyula Vályi Mathematical Association

The level of children's knowledge is reflected by the annual competitions on subjects. To improve the Hungarian pupils performance and to sustain their thirst of knowledge up, enjoy their learning of mathematics, facilitate their preparing for exams, discover some talented pupils who were going to be taught and meditated separately, all these obliged us to set up an urban centre (club) in Tg. Mureş (Marosvásárhely) and invite to its activity all the interested pupils from the surrounding localities. All these circumstances have obliged us to ensure a legal frame for the society activity. Thanks to the initiations of Dénes Sebestyén, Júlia Sebestyén and Árpád Donáth, we could set up the Gyula Vályi Society for the Gymnasium Mathematic Teachers that has been activating, until now, as a sister Department of the Hungarian Technical Scientific Society from Transylvania.

During our lives we have been doing our best to change and improve what we could. As a consequence, we have also changed our Society to Gyula Vályi Mathematical Association.

Not any other greater mathematician could ever be born in Marosvásárhely (Tg. Mureş), than Vályi Gyula, who was known to be the first Transylvanian mathematician at the University in Kolozsvár (Cluj-Napoca). During the past decades after his death, his name and activity have become almost unknown, forgotten entirely. It was only Tibor Weszely who remembered him in his work, published in the year of 1983 under the title of *The Life and Activity of Gyula Vályi.*

The truth is that our society did not choose the name of Gyula Vályi to be the denominator of the above-mentioned association only due to the fact that among all the mathematicians, born in the town of Marosvásárhely, he was considered to be the greatest of all. It is due to his personality, that we can also present him to our children as an example because of his diligence, strong will by which he could always come over the difficulties and hardships (e.g. his courage made possible for him come over his being handicapped), his love of homeland, his respect towards our ancestors, his cultivation of traditions (e.g. the creation of the Bolyai-cult), including some other features of his that could make possible to be admired for his deep human greatness, as well.

With the occasion of the Gyula Vályi Commemorative Competitions and festivities, his name may become known throughout the country thanks to the participating pupils who are fond of mathematics and together with their teachers will always keep in their minds the memory of the famous mathematician, Gyula Vályi.

The activity of the Gyula Vályi Mathematical Association is a part of our noble struggle in order to survive as a nationality, nowadays, and to mold the future intellectuals (or brain-workers) in Transylvania.

The objects of activity and goals of the Association have remained the same, all the time.