Jelfeldolgozás - 9. és 10. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

A szűrés célja

- Összetett jelek szétválasztása
- Torzított jelek visszaállítása

Példák:

- Magzat EKG jele: tartalmazza az anya szívverését és légzését is
- Rossz mikrofonnal vételezett hangjel helyreállítása

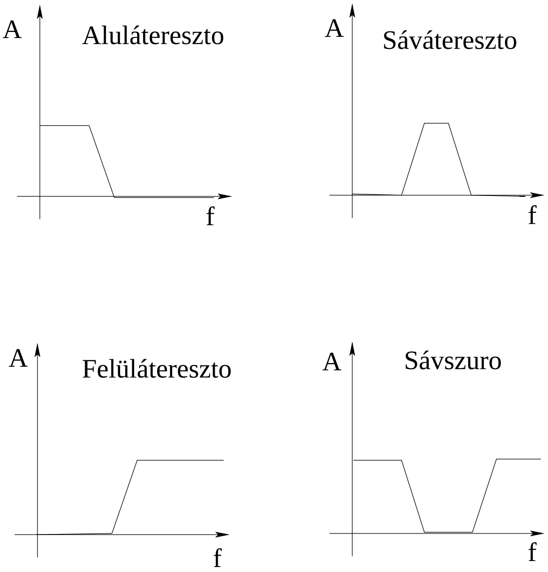
Szűrők működési elve

- A nemkívánt frekvenciákat csillapítják
- A hasznos frekvenciákat lehetőleg változás nélkül átengedik

Szűrők osztályozása frekvenciatartománybeli működés alapján

- aluláteresztő szűrő
- felüláteresztő szűrő
- sáváteresztő szűrő
- sávszűrő
- mindent áteresztő - csak a frekvenciakomponensek fázisát változtatja meg

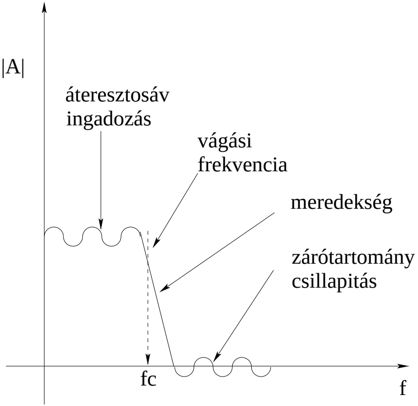
Szűrőtípusok



Szűrők osztályozása

- Analóg szűrők - analóg áramkör Vezetékes telefon - telefonközpont - aluláteresztő szűrő
- Digitális szűrők - digitális jelfeldolgozás

Szűrők jellemzői



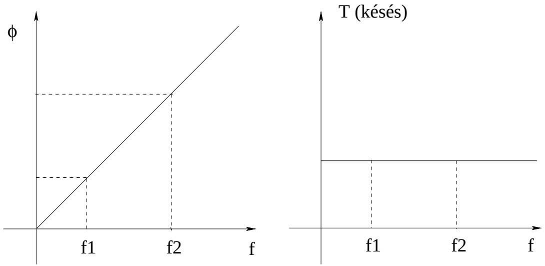
A vágási frekvencia f_c:

- Analóg szűrőknél: az amplitúdó 0.707-ed részére csökken
- A digitális szűrőknél nincs szabványosítva

Szűrők fázisjellemzői

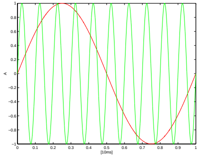
- Lineáris fázismenetű szűrők
- Nemlineáris fázismenetű szűrők

Lineáris fázismenet jellemzői



Minden frekvenciakomponenset ugyanannyi idővel késleltet.

Lineáris fázismenetű szűrők



Példa: Legyen $f_1 = 100Hz, \quad f_2 = 1000Hz$ és $T_{keses} = 0.2ms$ Határozzuk meg a két frekvencia fázszögét!

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 10ms \ \phi_1 = \frac{T_{keses}}{T_1} = 0.02, \ \phi_1[Rad] = \frac{0.2 \cdot 2\pi}{10} = \frac{\pi}{25}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 1ms \quad \phi_2 = \frac{T_{keses}}{T_2} = 0.2 \quad \phi_2[Rad] = \frac{0.2 \cdot 2\pi}{1} = \frac{2\pi}{5}$$

Jelek információtartalma időben és frekvenciában

Tételezzük fel, hogy egy út adott pontján rögzítjük a percenként áthaladó autók számát.

- IDŐ - DIREKT - Mintaérték $\Rightarrow$ autók száma
- FREKVENCIA - INDIREKT - Ha csak egy mintapontunk van $\Rightarrow$ Semmit sem tudunk a frekvenciatartalomról $\Rightarrow$ Az információ a minták egymáshoz való viszonyában van. Meredek átmenetek $\Rightarrow$ magas frekvenciájú komponensek.

Digitális szűrők osztályozása

- FIR - Finite Impulse Response - Véges impulzusválaszú
- IIR - Infinite Impulse Response - Végtelen impulzusválaszú -Rekurzív

FIR szűrők

LTI rendszer megadása differencia egyenlettel:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{1}$$

Ha $N = 0 \Rightarrow$ nem rekurzív szűrő, a kimenet csak az aktuális és az ezt megelőző bemenetektől függ $\Rightarrow$ Konvolúció ($h[n] = b_n$):

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{2}$$

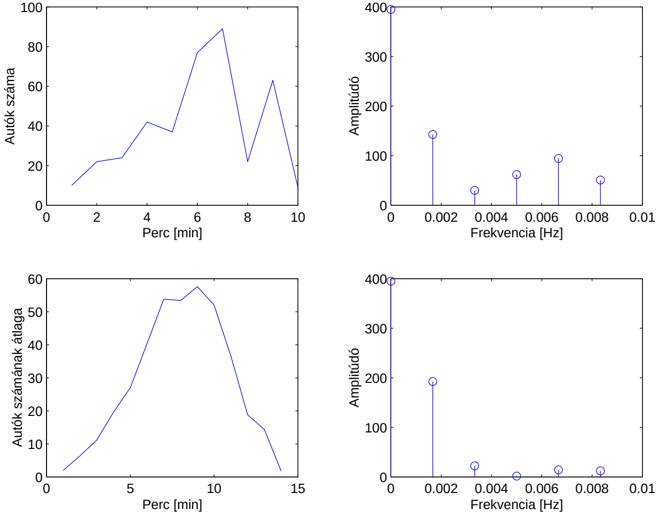
Feladatok

- Rajzolja le a mindent áteresztő szűrőt!
- Adja meg a mindent áteresztő szűrő súlyfüggvényét!
- Adott egy $h[n]$ súlyfüggvénnyel rendelkező aluláteresztő szűrő. Alakítsuk át felüláteresztő szűrővé

Konkrét példa [R. G. Lyons]-153. oldal

Idő	autók száma
1	10
2	22
3	24
4	42
5	37
6	77
7	89
8	22
9	63
10	9

Konkrét példa



Hogyan módosult a szűrt jel időben és frekvenciában?

Konkrét példa

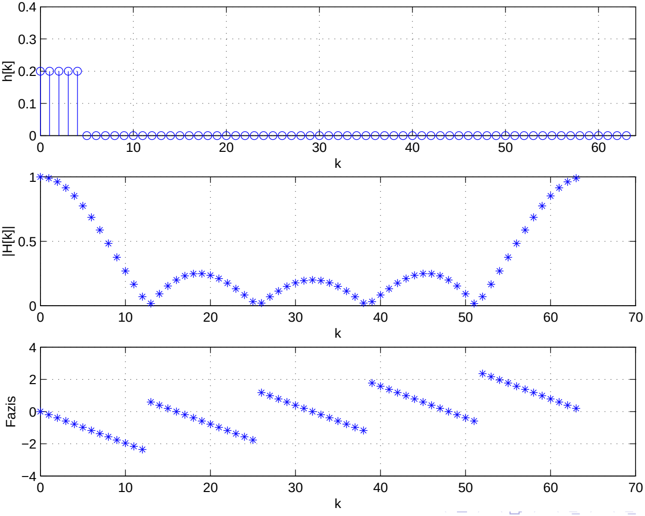
$$x = \{10, 200, 24, 42, 37, 77, 89, 22, 63, 9\}$$

$$h = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$$

$$y = h * x \quad y[n] = \sum_{k=1}^{5} h[k] \cdot x[n-k]$$

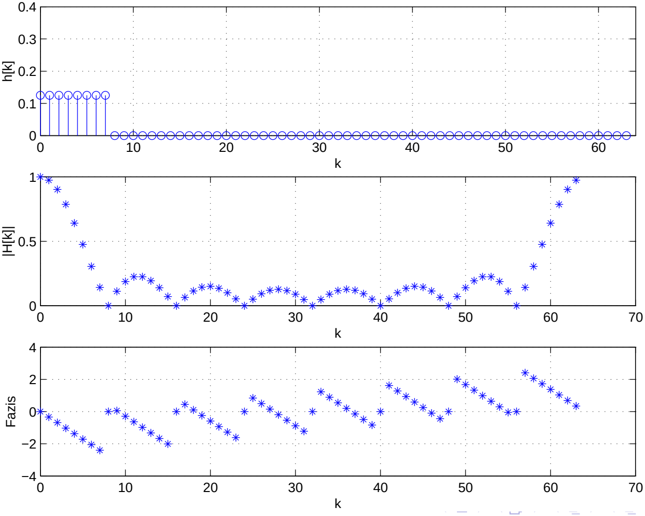
Átlagoló szűrő frekvenciaválasza(1)

$$h = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, \ldots\} \qquad (3)$$

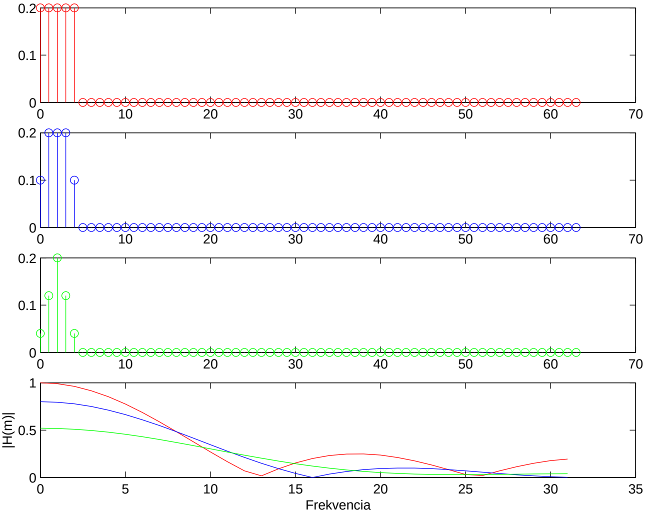


Átlagoló szűrő frekvenciaválasza(2)

$$h = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, , \frac{1}{8}, 0, 0, \ldots\} \tag{4}$$



Szűrők meredeksége



Átlagoló szűrők megvalósítási lehetőségei

- Konvolúció
- Gyors számítás

Átlagoló szűrő gyors megvalósítása

Tekintsük a minták ötönkénti átlagolását:

$$y[12] = \frac{x[12] + x[11] + x[10] + x[9] + x[8]}{5} \tag{5}$$

$$y[13] = \frac{x[13] + x[12] + x[11] + x[10] + x[9]}{5} \tag{6}$$

$\Rightarrow$

$$y[13] = y[12] + \frac{x[13] - x[8]}{5} \tag{7}$$

Általánosan:

$$y[n+1] = y[n] + \frac{x[n+1] - x[n+1-N]}{N} \tag{8}$$

A módszer előnyei

- Gyors
- Amíg a konvolúció végrehajtása függ a súlyfüggvény hosszától, addig ez a módszer ettől független.

Átlagoló szűrők: összefoglalás

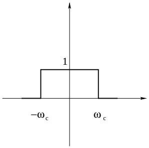
- Az átlagoló szűrők simítanak
- Főhatásukat időben fejtik ki - simítás
- Mellékhatásuk - frekvenciatartományban - aluláteresztő szűrők (a gyors átmeneteket elsimítják, ezzel kiszűrve a magas frekvenciákat)

Ablakozás módszere

Cél: meghatározni a szűrő kernelt (súlyfüggvényt)

- Kiindulunk a szűrő ideális frekvenciaválaszából

$$H_d(e^{j\omega})$$



- Keressük azt a $h_d[n]$ súlyfüggvényt, amelynek frekvenciaválasza $H_d(e^{j\omega})$

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \tag{9}$$

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{10}$$

Nagyon sok ideális rendszer frekvenciaválaszának végtelen impulzusválasz felel meg $\Rightarrow$ valahol el kell vágni

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \le n \le M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \tag{11}$$

Általánosan $h[n]$ felírható mint az ideális (és egyben végtelen) impulzusválasz $h_d[n]$ és egy véges ablak szorzataként $w[n]$

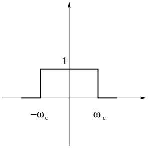
$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n] \tag{12}$$

A legegyszerűbb ablakfüggvény a négyszögű ablakfüggvény:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \tag{13}$$

$h_d[n]$ kiszámítása

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}d\omega, & -M \le n \le M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \quad (14)$$



$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\omega n}|_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$
$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}(cos\omega n + jsin\omega n)|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{sin\omega_c n}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}sinc(n\omega_c)$$

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{sin(\omega_c n)}{\pi n}, & -M \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \tag{15}$$

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c \cdot sinc(\omega_c n)}{\pi}, & -M \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \tag{16}$$

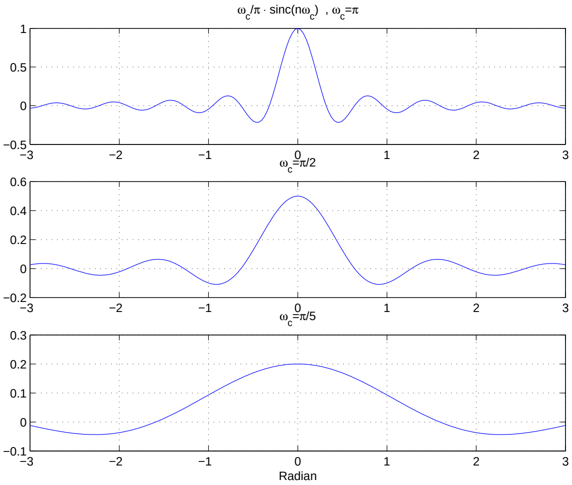
ahol

$$sinc(x) = \frac{sin(x)}{x} \tag{17}$$

A sinc függvény tulajdonságai

- csillapodik, de végtelen
- ablakozással végesre vágjuk
- minél több mintát veszünk annál
  - jobban megközelítjük az ideális frekvenciaválaszt
  - kevésbé hatékony
  - nagyobb az időkésleltetés

Súlyfüggvény és vágási frekvencia



Következtetések

- A sinc függvény főlebenye határozza meg az átmeneti tartomány szélességét
- A sinc függvény oldalsó lebenyei a csillapítási ingadozást határozzák meg

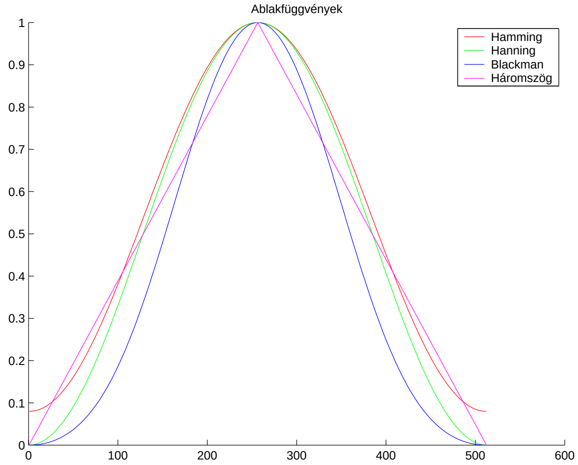
Ablakfüggvények

Segítségükkel megváltoztathatjuk a sinc függvényt
$\Rightarrow$ a szűrő tulajdonságai is megváltoznak.

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

- Négyszög
- Háromszög
- Hanning
- Hamming

Ablakfüggvények



Ablakfüggvények

- Négyszög

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \quad (18)$$

- Háromszög (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \quad (19)$$

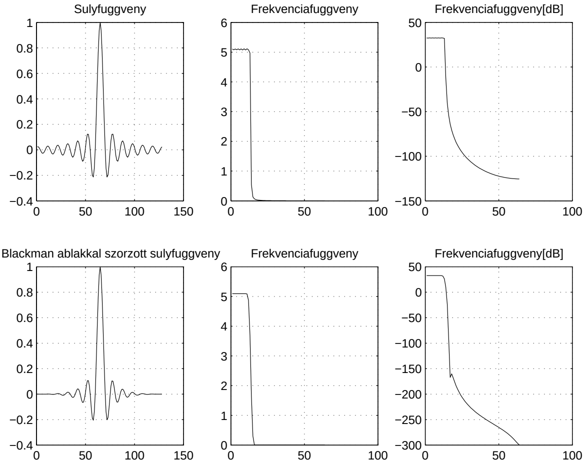
- Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \quad (20)$$

- Hamming

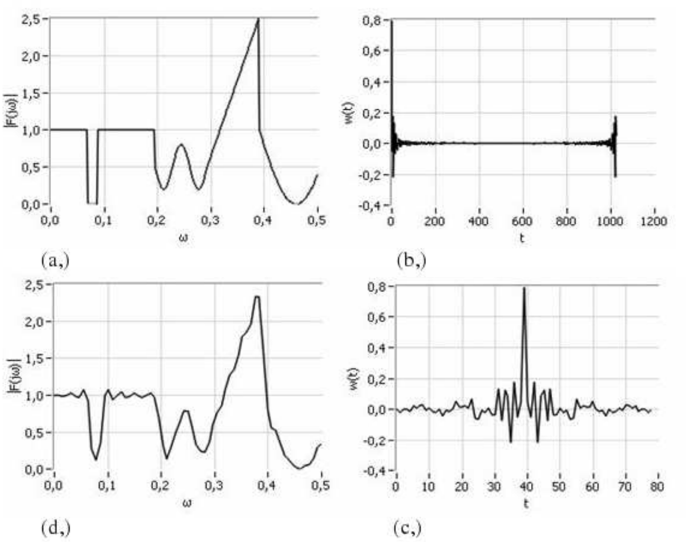
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & maskeppen \end{cases} \quad (21)$$

Ablakfüggvényel szorzott súlyfüggvény



Egyedi frekvenciafüggvénnyel megadott szűrő tervezése

[Smith.Digital Signal Processing pp.299]



A szűrő tervezési lépései

- A diszkrét frekvenciafüggvény megadása $H[n]$
- IDFT alkalmazása $h[n]$
- Kivesszük az első N/2 pontot: $h1 \leftarrow h(1:N/2)$
- Tükrözzük a h1-et: $h2 = sigflip(h1)$
- Összefűzzük $h2$-t és $h1$-t
- Az összefűzés előtt a $h1$ első elemét kivágjuk (duplán szerepel)

A módszer hiányosságai

- A kapott frekvenciafüggvény a kívántnál sokkal hullámosabb
- Az éles vágásoknál a meredekség nem megfelelő

A módszer hiányosságai

- A kapott frekvenciafüggvény a kívántnál sokkal hullámosabb
- Az éles vágásoknál a meredekség nem megfelelő

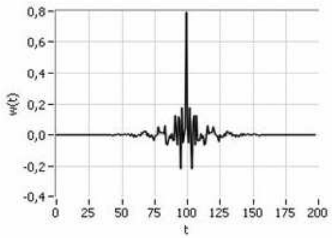
Megoldások

- Ennek a problémának az oka, hogy a DFT periódikusnak tekinti a jelet és ez a két végpontban nem egyenlő $\Rightarrow$ Nem kívánt frekvenciakomponensek is megjelennek $\Rightarrow$ Beszorozzuk a súlyfüggvényt egy ablakfüggvénnyel
- Növeljük a szűrőkernel hosszát

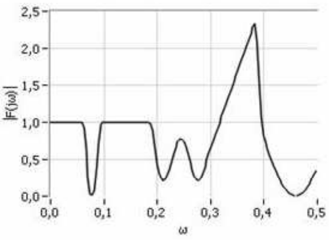
Megoldások

- Ennek a problémának az oka, hogy a DFT periódikusnak tekinti a jelet és ez a két végpontban nem egyenlő $\Rightarrow$ Nem kívánt frekvenciakomponensek is megjelennek $\Rightarrow$ Beszorozzuk a súlyfüggvényt egy ablakfüggvénnyel
- Növeljük a szűrőkernel hosszát

Hanning ablakkal szorzott 199 pontos szűrőkernel



(a)



(b)

FFT-vel megvalósított konvolúció

MIÉRT?

- FIR szűrő teljesítménye egyenesen arányos a kernel hosszával
- Konvolúció időigénye egyenesen arányos a kernel hosszával

$\Rightarrow$

SZÜKSÉG VAN GYORS KONVOLÚCIÓRA

$$x * h \Rightarrow X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \tag{22}$$

FFT alkalmazásának feltételei

- Az FFT a 2 hatványaira gyors
- Hosszú jelet célszerű feldarabolni (Keretekre bontás!)
- Legyen N a jeldarabka hossza és M a szűrőkernel hossza
- A konvolúció hossza $N + M - 1 \Rightarrow N$-et úgy választjuk meg, hogy $N + M - 1 = 2^p$

Példa: Legyen egy $M = 33$ pontos szűrőkernel, h

- Ekkor a jelet 128-33=95 pontos darabkákra bontjuk, x_k
- Mind a jeldarabkát, mind a kernelt kiegészítjük nullákkal
- $H \leftarrow FFT(h)$, $X \leftarrow FFT(x_k)$
- Elvégezzük a szorzást frekvenciatartományban

FIR szűrők előnyei

- stabil
- ideális lineáris fázismenetű szűrő (csak késleltetés, fázistorzítás nélkül)

FIR szűrők hátrányai

- nagy fokszám szükséges meredek átmeneti tartomány megvalósításához
- nehezebb adott kritériumot teljesíteni FIR szűrővel mint IIR szűrővel