Jelfeldolgozás - 7. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

Diszkrét Fourier transzformáció - DFT

Gyors Fourier transzformáció - FFT

Diszkrét Fourier transzformáció - DFT

Fourier transzformáció véges diszkrét jelekre

A vizsgált jel tulajdonságai:

- diszkrét
- véges
- nem periodikus

DTFT és DFT összehasonlítása

DTFT analízis:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Véges jelre, amelyben N nullától különböző minta van:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

DFT analízis:

$$X[k] = \sum^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (4)$$

DFS és DFT összehasonlítása

- DFS analízis

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \tag{5}$$

- DFT analízis

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \tag{6}$$

DFT nézőpontok:

- ha x[n] periodikus, X[k] a Fourier sorok egyik alakja
- ha x[n] nem periodikus, DFT a Fourier transzformált, $X(e^{j\omega})$ mintavételezett alakja

DFT és IDFT véges jelekre

- DFT véges jelre

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \tag{7}$$

- IDFT véges jelre

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn} \tag{8}$$

Gyors Fourier transzformáció

FFT - Fast Fourier Transform

Ez arra az esetre hatékony, ha a Fourier transzformált értékét összesen N pontra számítjuk $(\omega_k = \frac{2\pi k}{N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1)$

Ha a DFT-t $[\omega_1, \omega_2] \subset [0, 2\pi)$ frekvenciatartományra számítjuk, lëtezik gyorsabb is az FFT algoritmusnál

Jelölések

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$

Legyen $W_N = e^{-j(2\pi/N)} \Rightarrow e^{-j(2\pi/N)kn} = W_N^{kn}$

- Analízis

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad (9)$$

- Szintézis

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \qquad (10)$$

DFT direkt számítás hatékonysága

Egy darab $X[k]$ számítása:

- Szorzások száma: N komplex szorzás
- Összeadások száma: N-1 komplex összeadás

Egy komplex szorzás = 4 valós szorzás és két valós összeadás

Időigény: $T(N) = \Theta(N^2)$

Optimalizálási lehetőségek

- Szimmetria

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \tag{11}$$

- Periodicitás

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{n(k+N)} \tag{12}$$

FFT algoritmuscsalád

- Decimation in time
- Decimation in frequency

Radix-2 FFT

Legyen $N = 2^p$

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} =$

$\sum_{n paros} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n paratlan} x[n] W_N^{nk}$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{2rk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk}$$

Radix-2 FFT

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

$$W_N^2 = e^{-2j(2\pi/N)} = e^{-j(2\pi)/(N/2)} = W_{N/2}$$

$$\Rightarrow X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk}$$

$X[k] = G[k] + W_N^k H[k]$, ahol $G[k]$ és $H[k]$ periodikusak és a periodus $N/2$