Jelfeldolgozás - 5. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

Történelmi áttekintés

I. Fourier sorok

Matematikai jelölés
Mérnöki jelölés
Komplex alak

II. Fourier transzformáció

III. Diszkrét jelek Fourier sorbafejtése

IV. Diszkrét idejű Fourier transzformáció

Egy kis történelem

- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) matematikus és fizikus
- A Hő terjedését tanulmányozta
- 1807-ben írt dolgozatában a hő eloszlását szinuszokkal próbálta közelíteni
- A dolgozat bírálói: J. L. Lagrange (1836-1813) és P. S. Laplace (1749-1827)
- A dolgozatot Lagrange kérésére visszautasították
- 15 évvel később, Lagrange halála után, megjelenik a dolgozat

Kinek volt igaza?

- Lagrange: Szinuszok összegeként nem lehet előállítani ”sarkot” tartalmazó függvényt
- Utókor igazolta: A szinuszok összegével jól közelíthető bármely jel. A különbség energiája NULLA. (Gibbs jelenség)
- Diszkrét jelek esetében igaz Fourier állítása

Miért szinuszokra bontjuk a jelet?

A szinusz az egyetlen jel, amelyet az LTI rendszerek nem változtatnak meg. Vagyis ha egy LTI rendszer bemenetére egy adott frekvenciájú szinusz jelet adunk, akkor a kimenetén egy ugyanolyan frekvenciájú szinusz jelet kapunk. A jelnek csak az amplitúdója és a fázisa változhat.

$$A\sin(\omega t+\phi_1) \longrightarrow \boxed{\text{LTI rendszer}} \longrightarrow B\sin(\omega t+\phi_2)$$

A Fourier transzformáció célja

- Áttranszformálni a jelet IDŐ tartományból FREKVENCIA tartományba.
- Frekvencia tartományban sokszor egyszerűbb eszközökkel feldolgozható a jel.

Fourier transzformáció megnevezések

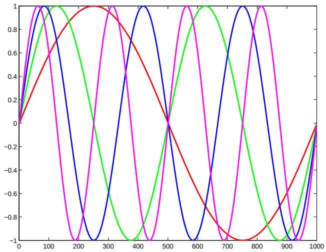
A jel típusa alapján megkülönböztetünk:

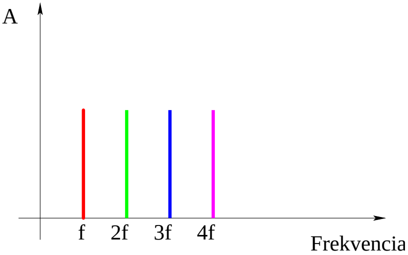
- I. Folytonos és periodikus: Fourier sorbafejtés
- II. Folytonos és nem periodikus: Fourier transzformáció
- III. Diszkrét és periodikus: Diszkrét jel Fourier sorbafejtése
- IV. Diszkrét és nem periodikus: Diszkrét idejű Fourier transzformáció

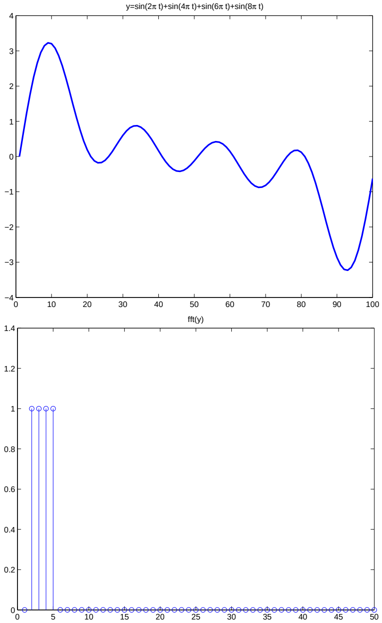
I. Fourier sorbafejtés

- Periodikus, folytonos jelekre alkalmazhatjuk.
- Periodikus jelek spektruma harmonikusokat tartalmaz. Vonalas spektrum.
- Az alapharmonikust, amely az időperiódusnak megfelelő frekvencia, alapfrekvenciának nevezzük. (f_0 - Fundamental frequency)
- A spektrum csak az alapfrekvencia egész számú többszöröseinek megfelelő frekvenciákat tartalmazhat: $f_0,\ 2f_0, 3f_0, \ldots$

Frekvencia spektrum



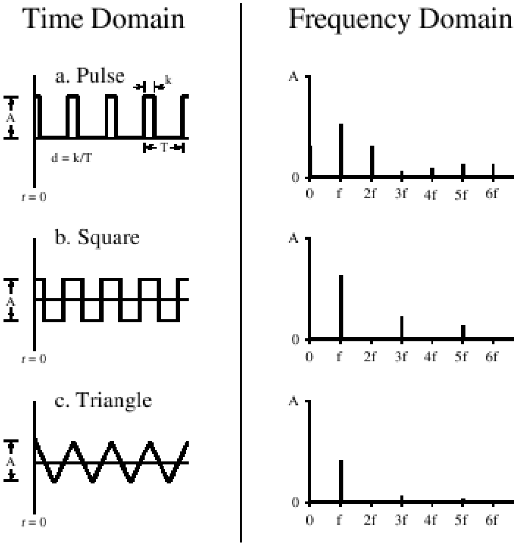



y=sin(2π t)+sin(4π t)+sin(6π t)+sin(8π t)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
fft(y)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

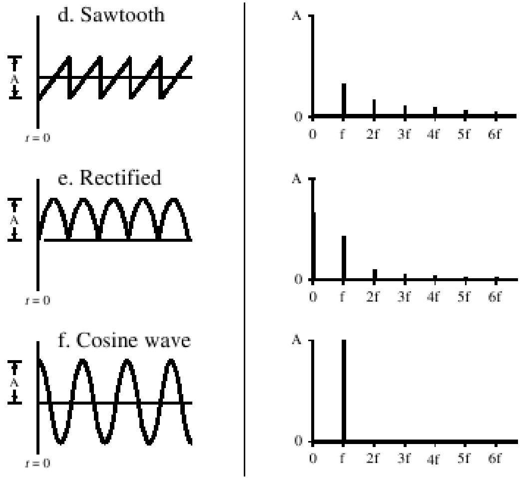
Matlab (Octave) példa

```
hold off; axis;

t=0:1/100:1-1/100;

y1=sin(2*pi*t); y2=sin(4*pi*t);

y3=sin(6*pi*t); y4=sin(8*pi*t);

y=y1+y2+y3+y4; plot(y);

fy=abs(fft(y));N=length(fy);

fy=2*fy/N;

axis([0,50, -2, 2]); plot(fy(1:N/2),'*');
```

Periodikus jelek spektruma [Smith]



Periodikus jelek spektruma [Smith]



Fourier sorok - Matematikai jelölés

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k sin(k\omega t) \tag{1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

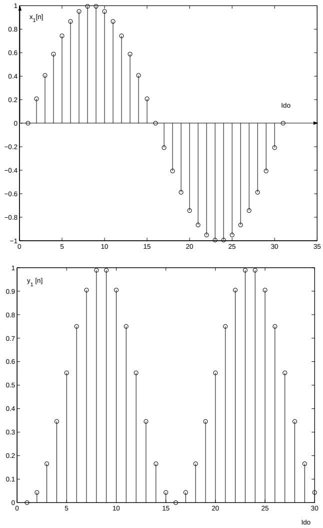
$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) cos(k\omega t) dt \tag{3}$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \tag{4}$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) sin(k\omega t) dt \tag{5}$$

Egyenáramú összetevő

A_0 -egyenáramú összetevő = A jel középértéke.



$$A_0 = 0$$

$$A_0 \neq 0$$

A Fourier sorok - Mérnöki jelölés

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k cos(k\omega t + \phi_k) \qquad (6)$$

$$C_0 = A_0 \qquad (7)$$

$$C_k = \frac{A_k}{cos(\phi_k)} = \frac{-B_k}{sin(\phi_k)} \qquad (8)$$

$$C_k = \sqrt{(A_k{}^2 + B_k{}^2)} \qquad (9)$$

$$\phi_k = arctg \frac{B_k}{A_k} \qquad (10)$$

Euler képlete - 1

- MATEMATIKA

$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x) \tag{11}$$

$$e^{-ix} = cos(x) - i \cdot sin(x) \tag{12}$$

$$i \cdot i = -1 \quad i = \sqrt{-1} \tag{13}$$

- MÉRNÖKTUDOMÁNYOK

$$x \rightarrow \omega t, \quad i \rightarrow j \tag{14}$$

$$e^{j\omega t} = cos(\omega t) + j \cdot sin(\omega t) \tag{15}$$

$$e^{-j\omega t} = cos(\omega t) - j \cdot sin(\omega t) \tag{16}$$

Euler képlete - 2

$$cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad (17)$$

$$sin(\omega t) = -j \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \qquad (18)$$

A Fourier sorok - Komplex alak

Elvégezve a (17) és a (18) képletekkel megadott helyettesítéseket az (1) képletben következik:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k - j \cdot B_k}{2} \cdot e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k + j \cdot B_k}{2} \cdot e^{-jk\omega t} \qquad (19)$$

Végezzük el a következő jelölést:

$$c_k = \begin{cases} \frac{A_k - jB_k}{2} & , \ ha\ k > 0 \\ \frac{A_{|k|} + jB_{|k|}}{2} & , \ ha\ k < 0 \\ A_0 & , \ ha\ k = 0 \end{cases} \qquad (20)$$

Fourier sor komplex alakja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \qquad (21)$$

$$c_k = \frac{1}{\ } \int^{T} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} \qquad (22)$$

II. Fourier transzformáció

- Nem periodikus, folytonos jelekre alkalmazhatjuk.
- Nem periodikus jel = Periodikus jel, amelyben $T \longrightarrow \infty$
- Ha $T \longrightarrow \infty$, akkor $f = \frac{1}{T} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ Folytonos spektrum
- Megkülönböztetünk magnitúdó-, illetve energiaspektrumot.

Fourier integrál

- Fourier sorok komplex alakja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \tag{23}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\omega t} \tag{24}$$

- Fourier integrál
  - Szintézis - Inverz Fourier transzformáció

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{25}$$

  - Analízis - Fourier transzformáció

$$X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{26}$$

Fourier transzformáció feltételek

- $X(\omega)$ komplex spektrális függvényt, $x(t)$ Fourier transzformáltjának nevezzük.
- $X(\omega)$-t jelölhetjük $X(e^{j\omega})$-val, így jobban látszik, hogy komplex
- A Fourier transzformáció konvergenciájának feltétele, hogy $x(t)$ abszolút integrálható legyen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{27}$$

III. Diszkrét jelek Fourier sorbafejtése

- Periodikus, diszkrét jelekre alkalmazhatjuk.
- A spektrum diszkrét lesz - vonalas spektrum
- A spektrum periodikus lesz

Diszkrét periodikus jelek

Jelölések:

- $x[n]$ diszkrét jel periodikus ha létezik egy $N > 0$ ú.h. $x[n] = x[n+N] \quad \forall n$
- T_s : mintavételezési periódus
- $F_s = \frac{1}{T_s}$: mintavételezési frekvencia

Példa

- Mintavételezzünk egy hangjelet $F_s = 8kHz$ frekvenciával.
- $8kHz = 8000Hz$ = 1s alatt 8000 mintát veszünk a jelből
- Hány mintát veszünk 20ms alatt?
- 512 mintát hány ms alatt veszünk?

Diszkrét jel Fourier sorbafejtése

Discrete Fourier Series (DFS)

Folytonos jel	Diszkrét jel
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}$	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$
$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j2\pi kt/T}$	$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$

IV. Diszkrét idejű Fourier transzformáció

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

- Nem periodikus, diszkrét jelekre alkalmazhatjuk.
- A spektrum folytonos lesz
- A spektrum periodikus lesz

Diszkrét idejű Fourier transzformáció

- DTFT: Diszkrét idejű Fourier Transzformáció

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{28}$$

- IDTFT: Inverz Diszkrét idejű Fourier Transzformáció

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \tag{29}$$

Feladatok

Határozzuk meg a következő jelek diszkrét idejű Fourier transzformáltját:

- $x[n] = (0.5)^n \cdot u[n]$
- egységimpulzus
- $n = -1:3 \quad x[n] = 1, 2, 3, 4, 5$

Feladatok

Határozzuk meg a következő jelek diszkrét idejű Fourier transzformáltját:

- $x[n] = (0.5)^n \cdot u[n]$
- egységimpulzus
- $n = -1:3 \quad x[n] = 1, 2, 3, 4, 5$

Feladatok

Határozzuk meg a következő jelek diszkrét idejű Fourier transzformáltját:

- $x[n] = (0.5)^n \cdot u[n]$
- egységimpulzus
- $n = -1 : 3 \quad x[n] = 1, 2, 3, 4, 5$

1. Feladat

Határozzuk meg $x[n] = (0.5)^n \cdot u[n]$ diszkrét idejű Fourier transzformáltját.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n \cdot e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5 \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.5\cdot\frac{1}{e^{j\omega}}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.5}$$

2. Feladat

Határozzuk meg az egységimpulzus diszkrét idejű Fourier transzformáltját.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = 1 \cdot e^{-j\omega 0} = 1$$

3. Feladat

Határozzuk meg $n = -1:3 \quad x[n] = 1, 2, 3, 4, 5$ diszkrét idejű Fourier transzformáltját.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} =$$
$$1 \cdot e^{j\omega} + 2 \cdot e^{0} + 3 \cdot e^{-j\omega} + 4 \cdot e^{-2j\omega} + 5 \cdot e^{-3j\omega}$$

Megjegyzések

- Ha $x[n]$ végtelen, a Matlab nem használható $X(e^{j\omega})$ kiszámítására.
- Ebben az esetben meghatározzuk $X(e^{j\omega})$-t és ábrázolhatjuk $[0, \pi]$ között a következő diagramokat:
  - Magnitúdó spektrum
  - Fázis spektrum
  - Valós rész
  - Imaginárius rész

4. Feladat

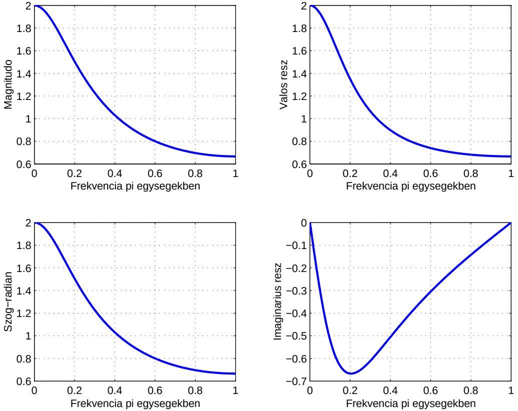
Ábrázoljuk a $X(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.5}$ Fourier transzformáltat $N = 501$ ponton a $[0, \pi]$ intervallumon

```
w=[0:1:500]*pi/500; N=length(w);
X=exp(j*w) ./ (exp(j*w)-0.5*ones(1,N));
magX=abs(X);angX=angle(X); realX=real(X);
imagX=imag(X);
```

4. Feladat-folytatás

```
subplot(2,2,1); plot(w/pi,magX); grid;
xlabel('Frekvencia pi
egysegekben');ylabel('Magnitudo');

subplot(2,2,3); plot(w/pi,magX); grid;
xlabel('Frekvencia pi
egysegekben');ylabel('Szog-radian');

subplot(2,2,2); plot(w/pi,realX); grid;
xlabel('Frekvencia pi
egysegekben');ylabel('Valos resz');

subplot(2,2,4); plot(w/pi,imagX); grid;
xlabel('Frekvencia pi
egysegekben');ylabel('Imaginarius resz');
```

4. Feladat - DFT ábrák



DTFT számítása véges jelekre

- Adott: $x[n]$, N darab mintát tartalmaz $n_1 \leq n \leq n_N$
- Feladat: $X(e^{j\omega})$ kiszámítása $[0, \pi]$ közötti, azonos távolságra levő frekvenciákra

$$\omega_k = \frac{\pi}{M}k, \quad k = 0, 1, \dots, M \tag{30}$$

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{i=1}^{N} e^{-j(\pi/M)kn_i} x[n_i], \quad k = 0, 1, \dots, M \tag{31}$$

DTFT számítása véges jelekre-folytatás

Ha X és x oszlopvektorok, akkor $X = Wx$, ahol

$$W = \begin{bmatrix} e^{-j(\pi/M)0\cdot n_1} & e^{-j(\pi/M)0\cdot n_2} & \dots & e^{-j(\pi/M)0\cdot n_N} \\ e^{-j(\pi/M)1\cdot n_1} & e^{-j(\pi/M)1\cdot n_2} & \dots & e^{-j(\pi/M)1\cdot n_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-j(\pi/M)M\cdot n_1} & e^{-j(\pi/M)M\cdot n_2} & \dots & e^{-j(\pi/M)M\cdot n_N} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$W \in \mathbb{M}_{(M+1)XN}$

DTFT számítása véges jelekre-folytatás

Ha k és n_i sorvektorok, akkor

$$W = [e^{(-j\frac{\pi}{M}k^T n)}] \tag{33}$$

Matlab környezetben a sorozatokat és az indexhalmazokat sorvektorként ábrázoljuk, ezért képezzük $X = Wx$ transzponáltját:

$$X^T = x^T W^T = x^T [e^{(-j\frac{\pi}{M}n^T k)}] \tag{34}$$

Matlab példa:

```
k=[0:M]; n=[n1:n2]; X=x*(exp(-j*pi/M)).^
(n'*k);
```

5. Feladat

- Állítsuk elő az $x[n],\ 0 \leq n \leq 10$, $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen jelet
- Ábrázoljuk az $x[n]$ diszkrét idejű Fourier transzformáltját