Jelfeldolgozás - 3. és 4. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

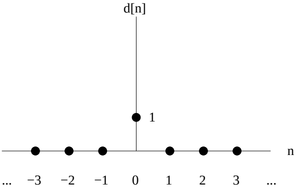
Rendszerek tulajdonságai

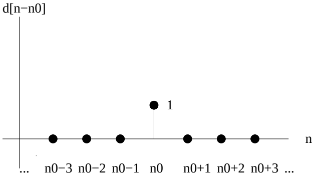
Megnevezések

- Diszkrét Dirac jel
- Delta függvény
- Egységimpluzus függvény

A diszkrét Dirac jel

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$





A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása a Dirac jel segítségével

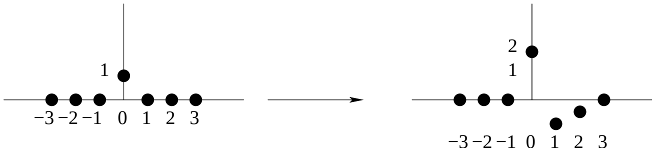
A delta függvény és az impulzusválasz
Konvolúció
A konvolúció tulajdonságai
Korreláció
Rendszerek tulajdonságai

$$y[n] = \begin{cases} 5, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases} \tag{1}$$

- időeltolás: $\delta[n-3]$
- amplitúdóskálázás: $5 \cdot \delta[n-3]$

Impulzusválasz: $h[n]$

Az impulzusválasz a rendszer kimenete a Dirac jelre.



A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

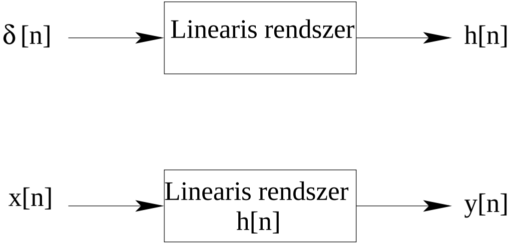
Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Impulzusválasz más megnevezések

- filter kernel: szűrő-mag
- convolution kernel: konvolúciós mag

Lineáris rendszer válasza tetszőleges jelre



y[n]=x[n]*h[n]

Konvolúció diszkrét jelekre 1.

Legyen egy LTI rendszer, amelynek impulzusválasza $h[n]$

$$\delta[n] \rightarrow h[n] \quad (2)$$

Mi a kimenete a rendszernek az $x[n]$ bemenő jelre?

- A bemenő jelet felbontjuk impulzusok összegére

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \quad (3)$$

- Ismerve az impulzusválaszt a Dirac jelre és az LTI rendszerek tulajdonságait, következik:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \quad (4)$$

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Konvolúció diszkrét jelekre 2.

Konvolúció jelölése: $*$

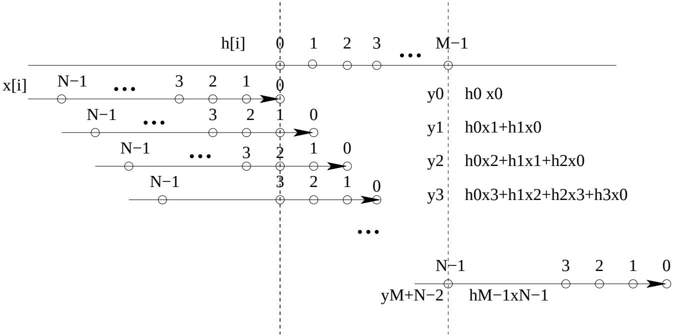
$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot x[n-k] \tag{5}$$

$$x[n], \quad n = 0..N-1$$

$$h[n], \quad n = 0..M-1$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cdot x[n-k] \tag{6}$$

Konvolúció lépésenként



Példa

Legyenek $x = (0, 1, 2, 3)$ és $h = (1, 2, 1)$ diszkrét idejű jelek. Számítsuk ki az $y = h * x$ konvolúciót!

1 2 1
3 2 1 0
y0 =0

1 2 1
3 2 1 0
y1=1

1 2 1
3 2 1 0
y2 =4

1 2 1
3 2 1 0
y3 =8

1 2 1
3 2 1 0
y4=8

1 2 1
3 2 1 0
y5=3

$$(0, 1, 2, 3) * (1, 2, 1) = (0, 1, 4, 8, 8, 3)$$

Példák konvolúcióra

- Aluláteresztő szűrő
- Felüláteresztő szűrő
- Invertáló csillapító
- Diszkrét deriváló

A delta függvény és az impulzusválasz

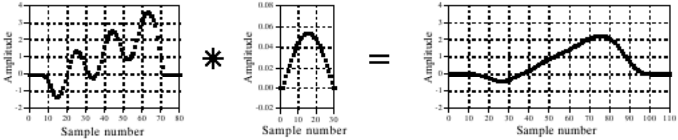
Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

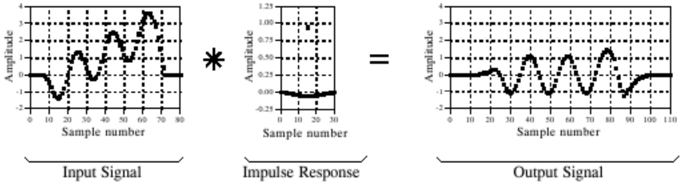
Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

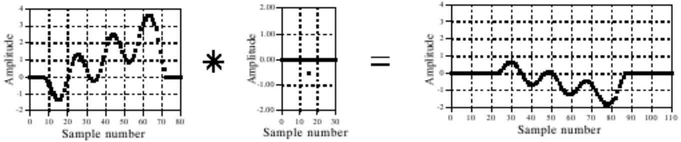
Aluláteresztő szűrő-Smith könyve nyomán



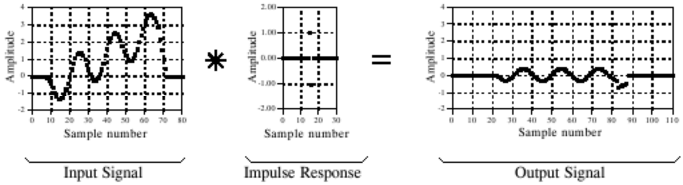
Felüláteresztő szűrő-Smith könyve nyomán



Invertáló csillapító-Smith könyve nyomán



Diszkrét deriváló-Smith könyve nyomán



A konvolúció tulajdonságai

- Impulzusválasz elemi jelekre:
  - A diszkrét Dirac jel
  - Diszkrét derivált és integrál
- Matematikai tulajdonságok
  - Kommutativitás
  - Asszociativitás
  - Disztributivitás
  - A központi határeloszlási tétel

Konvolúció a diszkrét Dirac jellel (1)

$$x[n] * \delta[n] = x[n] \tag{7}$$

Bizonyítás: Legyen $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

Tekintsük a $\delta[0],\ \delta[1],\ \delta[2]$ értékeket

és $x[n], \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$ egy tetszőleges jel.

Ekkor:$y[n] = x[n] * \delta[n]$ konvolúció a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
y[0] &= \delta[0] \cdot x[0] = x[0] \\
y[1] &= \delta[0] \cdot x[1] + \delta[1] \cdot x[0] = x[1] \\
y[2] &= \delta[0] \cdot x[2] + \delta[1] \cdot x[1] + \delta[2] \cdot x[0] = x[2] \\
y[3] &= \delta[0] \cdot x[3] + \delta[1] \cdot x[2] + \delta[2] \cdot x[1] = x[3] \\
&\dots
\end{aligned}$$

Konvolúció a diszkrét Dirac jellel (2)

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0] \tag{8}$$

Bizonyítás: Legyen $n_0 = 2$ és $\delta = \{0, 0, 1\}$

és $x[n], \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$ egy tetszőleges jel.

Ekkor:$y[n] = x[n] * \delta[n - 2]$ konvolúció a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
y[0] &= \delta[0] \cdot x[0] = 0 \\
y[1] &= \delta[0] \cdot x[1] + \delta[1] \cdot x[0] = 0 \\
y[2] &= \delta[0] \cdot x[2] + \delta[1] \cdot x[1] + \delta[2] \cdot x[0] = x[0] \\
y[3] &= \delta[0] \cdot x[3] + \delta[1] \cdot x[2] + \delta[2] \cdot x[1] = x[1] \\
y[4] &= \delta[0] \cdot x[4] + \delta[1] \cdot \delta[3] + \delta[2] \cdot x[2] = x[2] \\
y[5] &= \delta[1] \cdot x[4] + \delta[2] \cdot x[3] = x[3]
\end{aligned}$$

Konvolúció a diszkrét Dirac jellel (3)

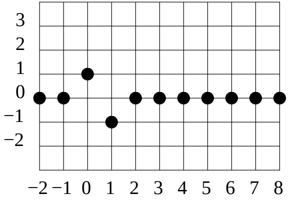
$$x[n] * k \cdot \delta[n] = k \cdot x[n] \tag{9}$$

- Ha a Dirac impulzus amplitúdóját növeljük ($k > 1$), a konvolúció, mint lineáris rendszer, erősítőként működik.
- Csökkentés esetében ($k < 1$) pedig csillapítóként.

„Diszkrét deriválás”

Első rendű különbség

- $h = [0, 0, 1, -1, 0, \ldots], \quad y[n] = x[n] * h[n]$

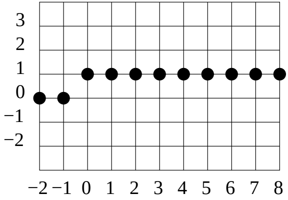


- $y[n] = x[n] - x[n-1]$

„Diszkrét integrálás”

”Running sum”

- $h = [0, 0, 1, 1, 1, \ldots], \quad y[n] = x[n] * h[n]$



- $y[n] = y[n-1] + x[n]$

Matematikai tulajdonságok: kommutativitás

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

Matematikai tulajdonságok: asszociativitás

A konvolúció sorrendje nem lényeges

$$(x[n] * h1[n]) * h2[n] = x[n] * (h1[n] * h2[n])$$

HA

$$x[n] \longrightarrow h1[n] \longrightarrow h2[n] \longrightarrow y[n]$$

AKKOR

$$x[n] \longrightarrow h2[n] \longrightarrow h1[n] \longrightarrow y[n]$$

ÉS

$$x[n] \longrightarrow h1[n] * h2[n] \longrightarrow y[n]$$

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

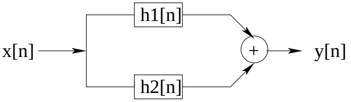
Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

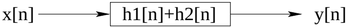
Matematikai tulajdonságok: disztributivitás az összeadásra nézve

$$x[n] * h1[n] + x[n] * h2[n] = x[n] * (h1[n] + h2[n])$$

HA



AKKOR



A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Matematikai tulajdonságok: határeloszlás (1)

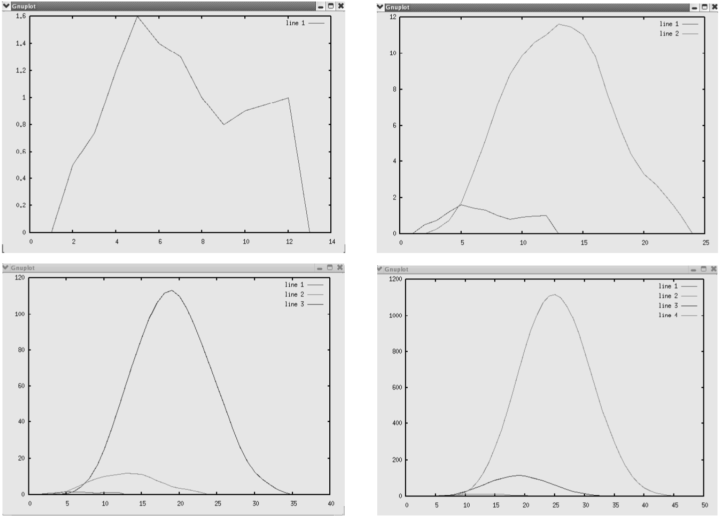
Legyen $x[n]$ egy impulzusszerű függvény. Mi történik, ha képezzük a következő konvolúciókat?

$$y1[n] = x[n] * x[n]$$

$$y2[n] = x[n] * x[n] * x[n]$$

$$y3[n] = x[n] * x[n] * x[n] * x[n]$$

Matematikai tulajdonságok: határeloszlás (2)



Hogyan változik a fenti jelek szórása?

Osztályozás

- Autokorreláció (Autocorrelation)
- Keresztkorreláció (Cross Correlation)

Korreláció 1.

- Konvolúció

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n-k] \qquad (10)$$

- Korreláció

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n+k] \qquad (11)$$

- A korreláció értéke maximális, ha a két jel formája hasonló és fázisban vannak.
- A korreláció a két jel hasonlóságának mértéke.

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Korreláció 2.

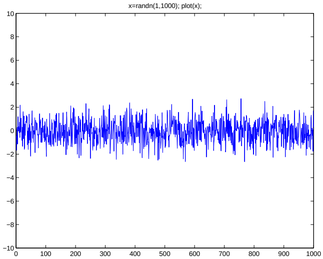
$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot y[n+k] \tag{12}$$

$$r[n] = x[n] * y[-n] \tag{13}$$

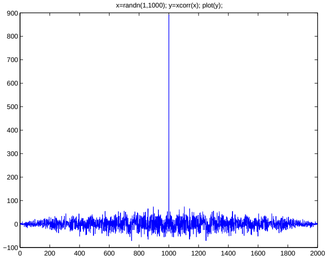
- $x = y \rightarrow$ autokorreláció
- $x \neq y \rightarrow$ keresztkorreláció

Zaj autokorrelációja

A véletlen zaj önmagához hasonló, nincs fáziseltolás.

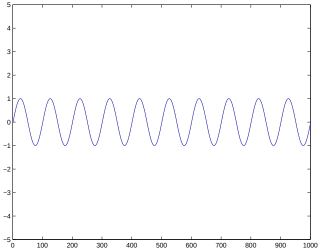


Az autokorreláció egyetlen csúcsot tartalmaz.

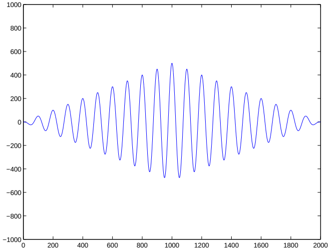


Periodikus jel autokorrelációja

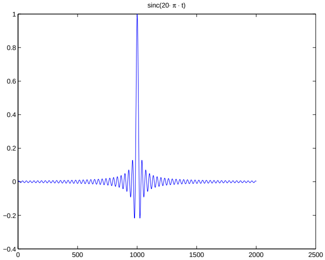
A periodikus jel időbeni eltolása azt eredményezi, hogy a a jel periódikusan fázisban lesz önmagával.

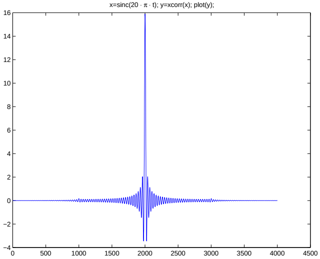


Az autokorrelált jel is periodikus struktúrájú lesz.



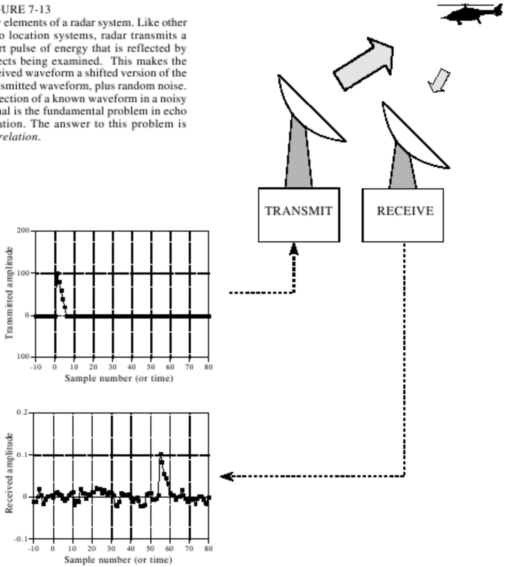
Tranziens jel autokorrelációja





Keresztkorreláció célja

FIGURE 7-13
Key elements of a radar system. Like other echo location systems, radar transmits a short pulse of energy that is reflected by objects being examined. This makes the received waveform a shifted version of the transmitted waveform, plus random noise. Detection of a known waveform in a noisy signal is the fundamental problem in echo location. The answer to this problem is *correlation*.



Rendszerek tulajdonságai

- Időfüggetlenség
- Memória
- Kauzalitás (Okbeliség)
- Stabilitás

A delta függvény és az impulzusválasz

Konvolúció

A konvolúció tulajdonságai

Korreláció

Rendszerek tulajdonságai

Időfüggetlenség

Egy időbeni eltolás a bemenő jelen ugyanolyan eltolást eredményez a kimenő jelen.

$$x[n] \to y[n]$$

$$x[n-t] \to y[n-t]$$

- PÉLDA: $y[n] = -\frac{x[n]}{2}$
- ELLENPÉLDA: $y[n] = x[Mn], \quad M \in N^*$

Memóriamentes

Egy jelet memóriamentesnek nevezünk, ha minden n időpillanatban, $y[n]$ csak az $x[n]$-től függ.

- PÉLDA: $y[n] = x[n]^3$
- ELLENPÉLDA: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Kauzalitás

A kimenő jel az n_0-dik pillanatban a bemenő jel $n \leq n_0$ pillanatbeli értékeitől függ.

- PÉLDA: $y[n] = x[n] - x[n-1]$
- ELLENPÉLDA: $y[n] = x[n+1] - x[n]$

Stabilitás (BIBO-féle)

BIBO - Bounded Input Bounded Output

Egy rendszer stabil BIBO értelemben, ha bármely korlátos bemenő jelre korlátos kimenő jelet ad.

$$\forall x, |x[n]| \leq B_x < \infty \; \forall n \quad \Rightarrow \quad \exists \, B_y u.h. |y[n]| \leq B_y < \infty \quad \forall n$$

- PÉLDA: $y[n] = x[n]^2$
- ELLENPÉLDÁK:
  - $y[n] = \log_{10} |x[n]|$
  - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (n+1), & n \geq 0 \end{cases}$