

# Jelfeldolgozás- 2. előadás

ANTAL Margit

Sapientia - Erdélyi Magyar Tudományegyetem

2007

## Jelek és műveletek

## Analóg digitális átalakítás

## Lineáris rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és energia

Lineáris rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása

Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

- ▶ Szinuszjel

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

- ▶ Egységugrás jel

$$u(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases} \quad (2)$$

- ▶ Lineáris változású jel

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

- ▶ Dirac jel

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (4)$$

Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

# Diszkrét elemi jelek

Jelek és  
műveletek

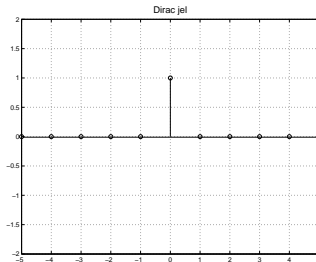
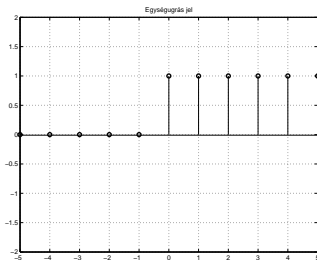
Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

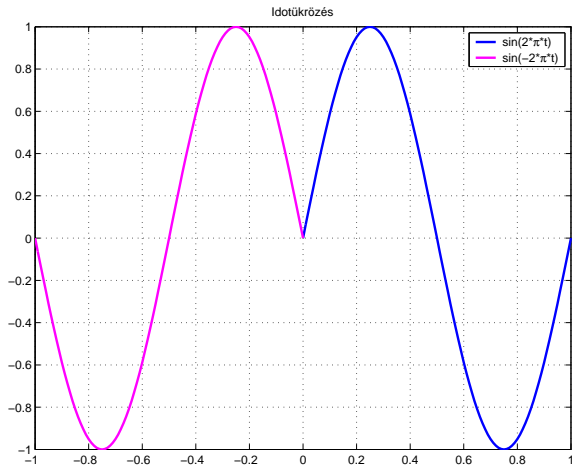
Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása



<http://www.ee.washington.edu/class/235dl/EE235/Project/lesson2/lesson2.html>

- ▶ Időtartományban módosító műveletek:
  - ▶ Időtükrozés (Reflexió):  $y(t) = x(-t)$
  - ▶ Időintervallum skálázás:  $y(t) = x(at)$
  - ▶ Időeltolás:  $y(t) = x(t - t_0)$
- ▶ Amplitúdóban módosító műveletek:
  - ▶ Skálázás:  $y(t) = cx(t)$
  - ▶ Összeadás:  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
  - ▶ Szorzás (pontonként):  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

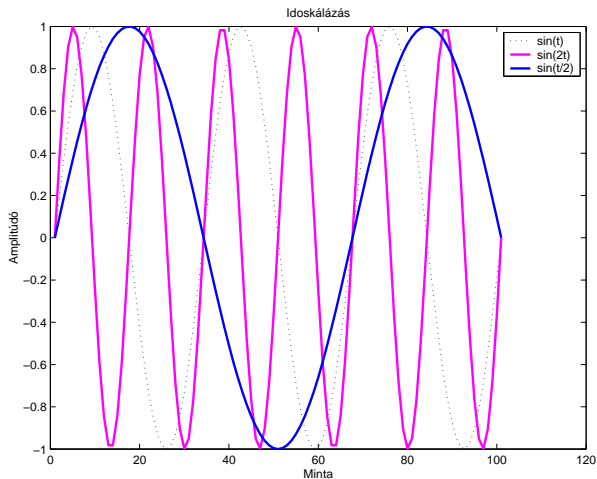
Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

# Időintervallum skálázás



## Jelek és műveletek

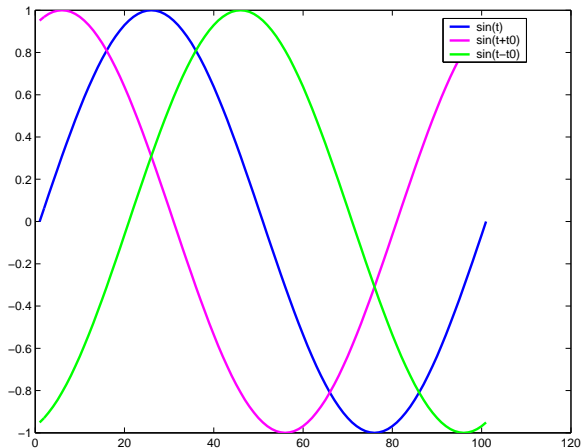
### Analóg digitális átalakítás

### Lineáris rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és energia

Lineáris rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

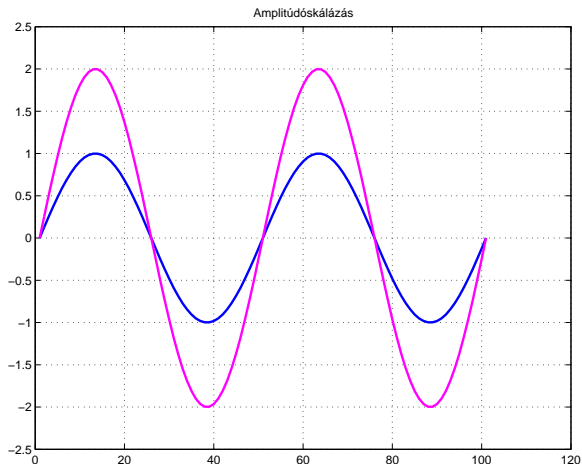
Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása



# Amplitúdó skálázás



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

# Jelek összeadása

## Jelek és műveletek

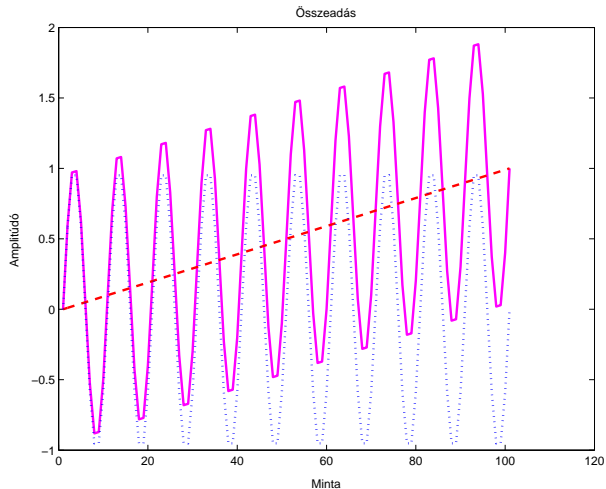
### Analóg digitális átalakítás

### Lineáris rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és energia

Lineáris rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása



# Jelek szorzása

## Jelek és műveletek

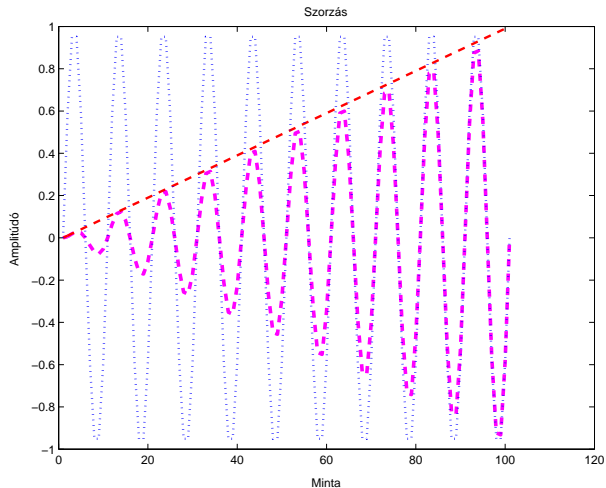
### Analóg digitális átalakítás

### Lineáris rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és energia

Lineáris rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása



# Analóg digitális átalakítás

- ▶ Mintavételezés
- ▶ Kvantálás

ANALÓG JEL  $\rightarrow$  DISZKRÉT JEL

FÜGGETLEN VÁLTOZÓ: FOLYTONOS  $\rightarrow$  DISZKRÉT

$$f : R \rightarrow R, \quad f(t)$$

$$f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n), \dots$$

$$t_i = i \cdot T_s$$

$$f[0 \cdot T_s], f[1 \cdot T_s], f[2 \cdot T_s], \dots, f[n \cdot T_s], \dots$$

JELÖLÉS:  $f[i \cdot T_s] \rightarrow f[i]$

Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

FÜGGŐ VÁLTOZÓ: FOLYTONOS  $\rightarrow$  DISZKRÉT

mintaérték mérete

Pl. 8 bit  $\rightarrow$  256 féle érték

25.12  $\rightarrow$  25    25.34  $\rightarrow$  25

Felbontás: minta mérete bitben

# Mintavételezési frekvencia

Jelek és  
műveletek

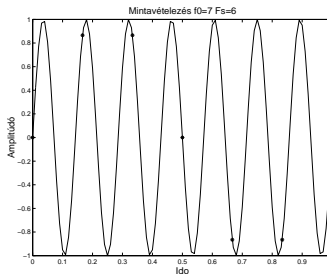
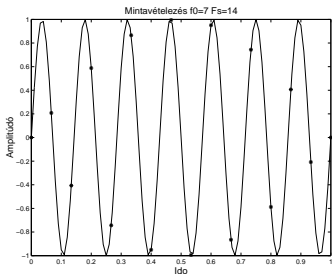
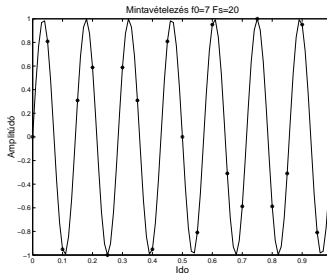
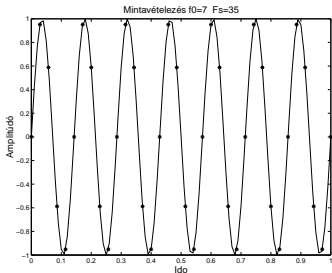
Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása



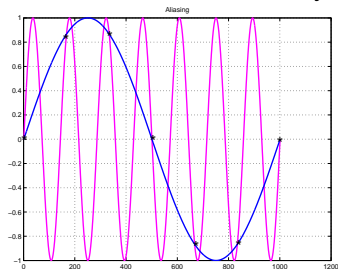
- ▶ Telefon:  $F_s = 8\text{kHz}$ , minta 8 bites
- ▶ Audio CD:  $F_s = 44.1\text{kHz}$ , minta 16 bites



Legyen  $f_s$  a mintavételezési frekvencia

$$k \in \mathbb{Z}$$

Nem lehet megkülönböztetni az  $f_0$  frekvenciájú mintavételezett szinusz jelet az  $f_0 + k \cdot f_s$  frekvenciájú mintavételezett szinusz jeltől



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

# Aliasing - matematika (1)

Jel:  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

Mintavételezési frekvencia:  $f_s$  (periódus:  $t_s = 1/f_s$ )

$$\begin{aligned}x[0] &= \sin(2\pi f_0 \cdot 0 \cdot t_s) \\x[1] &= \sin(2\pi f_0 \cdot 1 \cdot t_s) \\x[2] &= \sin(2\pi f_0 \cdot 2 \cdot t_s) \\&\dots \\&\dots \\x[n] &= \sin(2\pi f_0 \cdot n \cdot t_s)\end{aligned}\tag{5}$$

# Aliasing - matematika (2)

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi m),$$

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m) = \sin(2\pi(f_0 + \frac{m}{n t_s}) n t_s)$$

Legyen  $m = kn$  és helyettesítsük  $t_s = \frac{1}{f_s}$

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 \cdot n \cdot t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s) n t_s)$$

Egy folytonos jelet akkor mintavételezünk megfelelőképpen, ha a mintavételezési frekvencia legalább kétszer akkora, mint a jelben jelen levő legnagyobb frekvencia.

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max} \quad (6)$$

# Amplitúdó, magnitúdó és energia

- ▶ Amplitúdó:  $x[n]$
- ▶ Magnitúdó:  $|x[n]|$
- ▶ Energia:  $x_E[n] = x[n]^2 = |x[n]|^2$

# Lineáris rendszerek tulajdonságai

## ▶ homogenitás

ha  $x[n] \rightarrow y[n]$

akkor  $kx[n] \rightarrow ky[n]$

## ▶ additivitás

ha  $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

és ha  $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$

akkor  $x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n]$

# Homogenitás

Jelek és  
műveletek

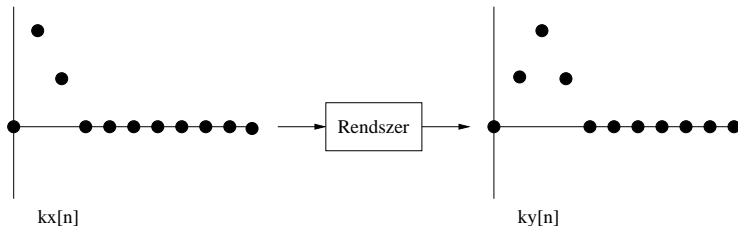
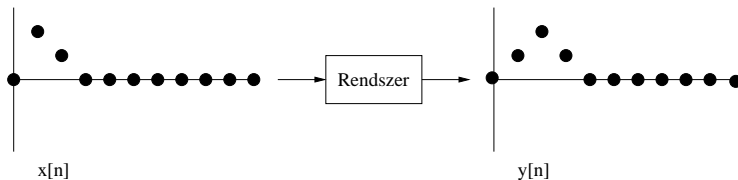
Analóg digitális  
átalakítás

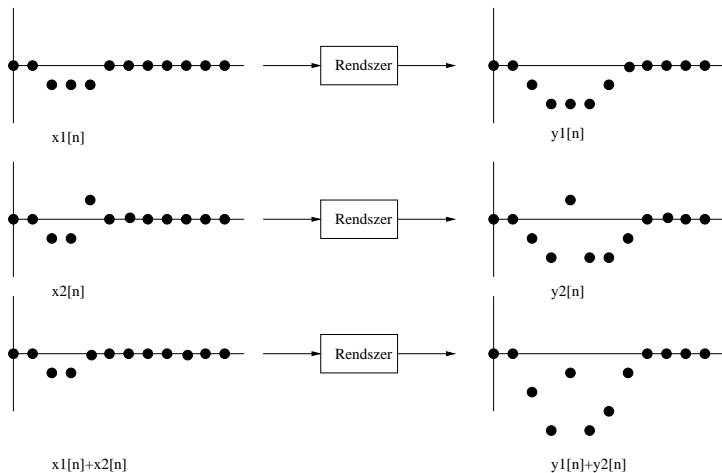
Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása





Jelek és műveletek

Analóg digitális átalakítás

Lineáris rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és energia

Lineáris rendszerek tulajdonságai

Jelek felbontása



# LTI (Linear Time Invariant) rendszerek

Időinvariáns - Shift invariance

ha  $x[n] \rightarrow y[n]$

akkor  $x[n - i] \rightarrow y[n - i]$

# Példák lineáris rendszerekre

- ▶ Állandóval való szorzás: erősítő, csillapító  
 $y_{OUT} = k \cdot y_{IN}$
- ▶ Az egység rendszer: a kimenet egyenlő a bemenettel  $y_{OUT} = y_{IN}$
- ▶ A null rendszer:  $y_{OUT} = 0$
- ▶ Konvolúció (ld. következő fejezet)

# Szuperpozíció

Jelek és  
műveletek

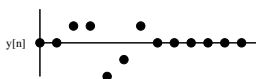
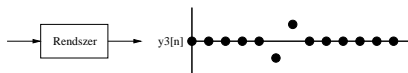
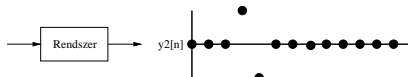
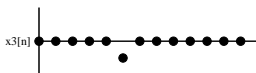
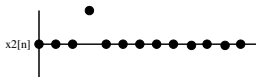
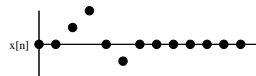
Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

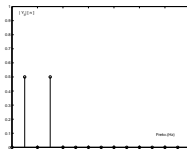
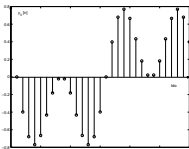
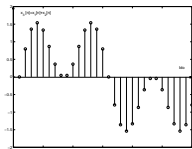
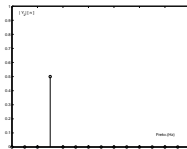
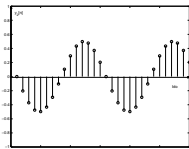
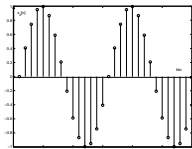
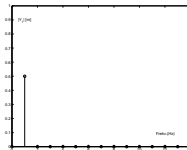
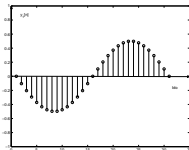
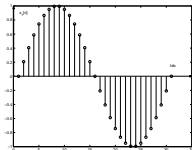
Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása



# Példa lineáris rendszerre

$$y[n] = -0.5 \cdot x[n]$$



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

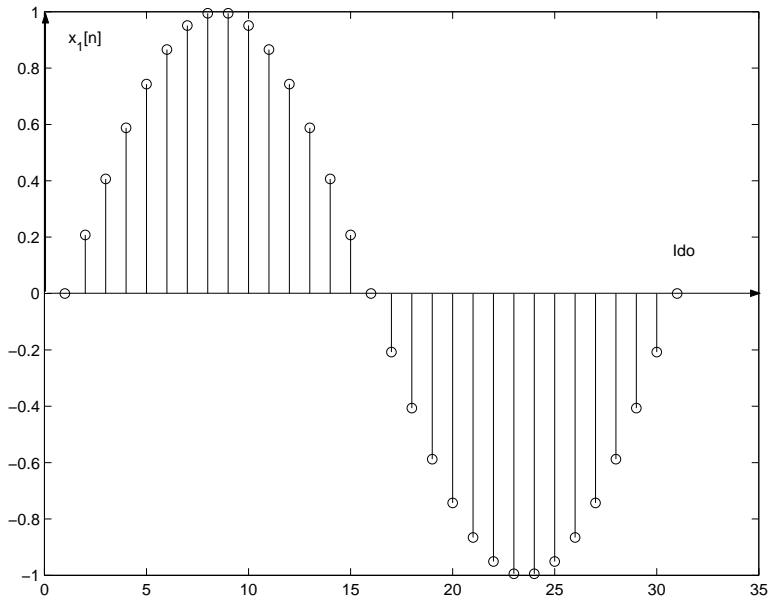
Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

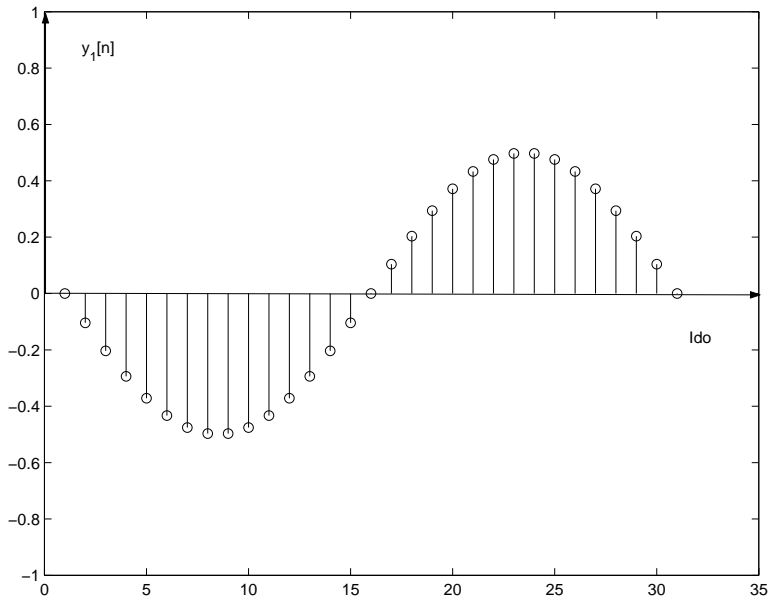
Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

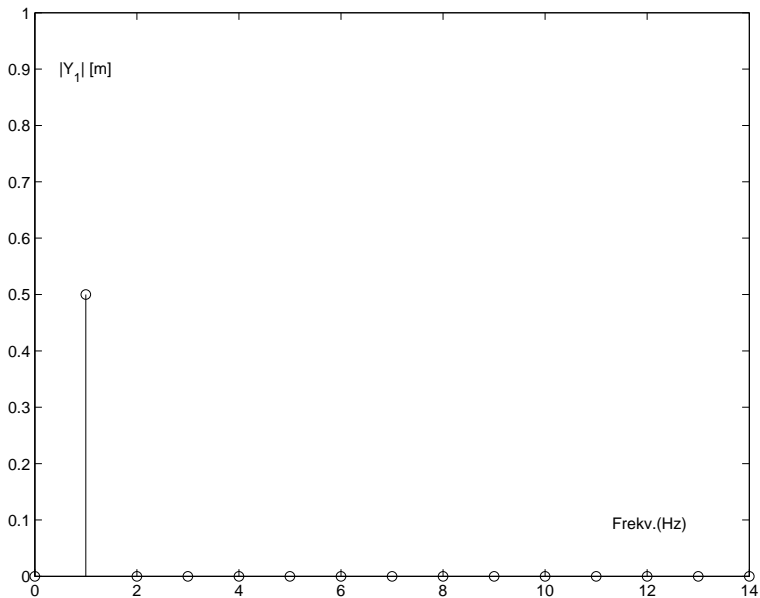
# $x_1[n]$



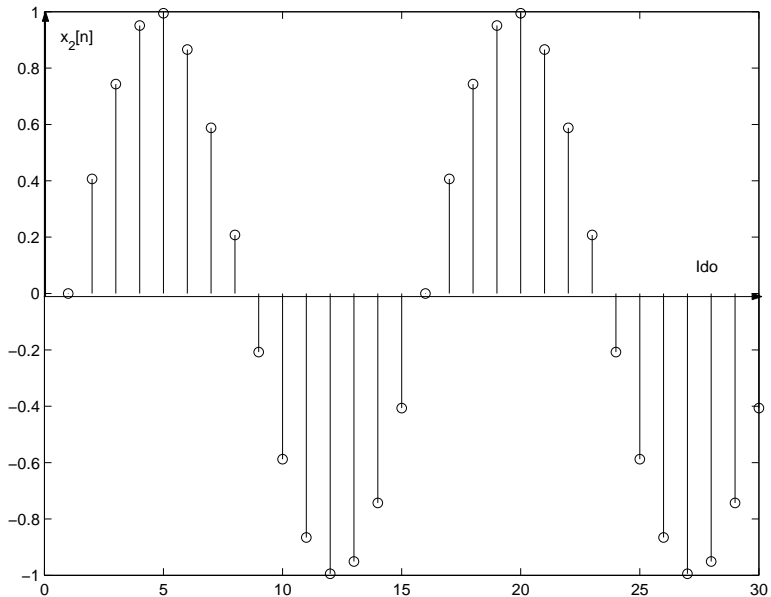
$$y_1[n] = -\frac{x_1[n]}{2}$$



$|Y_1[m]|$



# $x_2[n]$



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

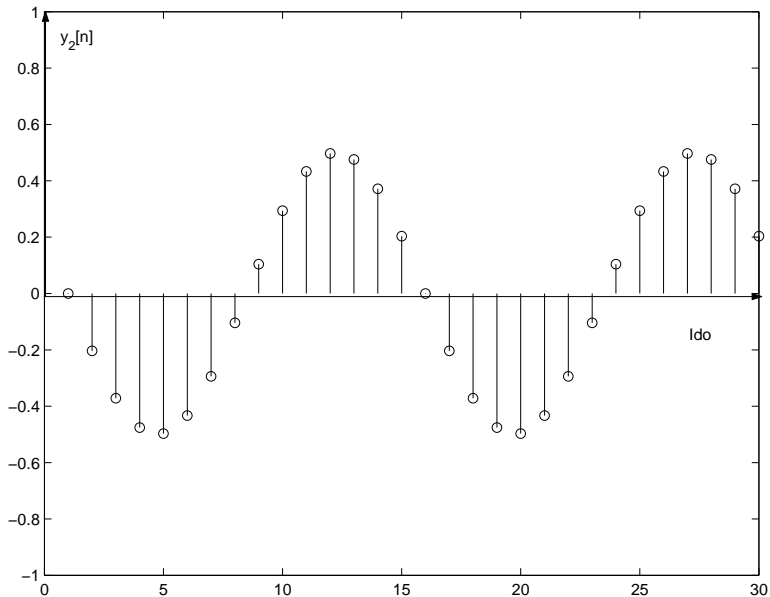
Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

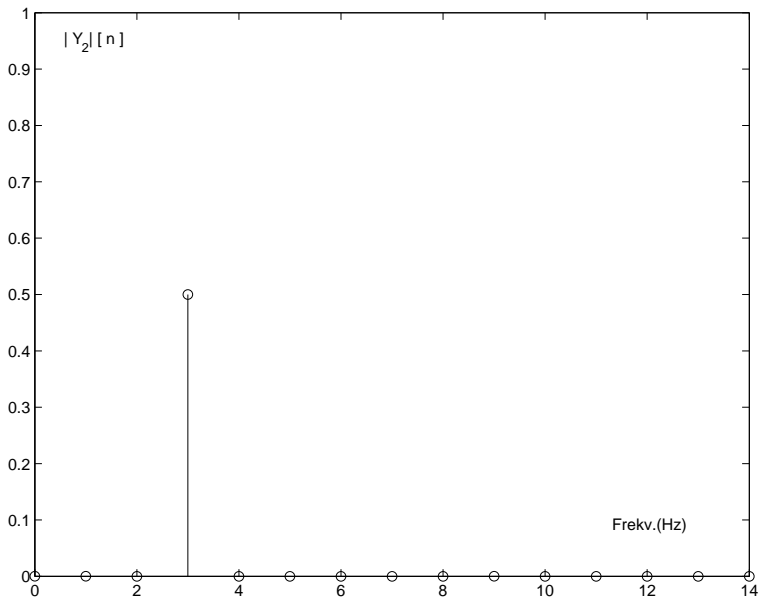
Jelek felbontása



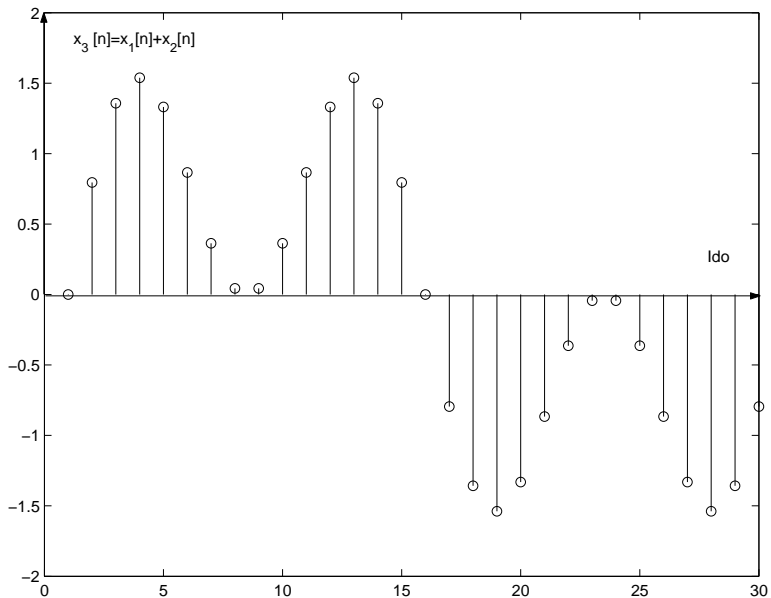
$$y_2[n] = -\frac{x_2[n]}{2}$$



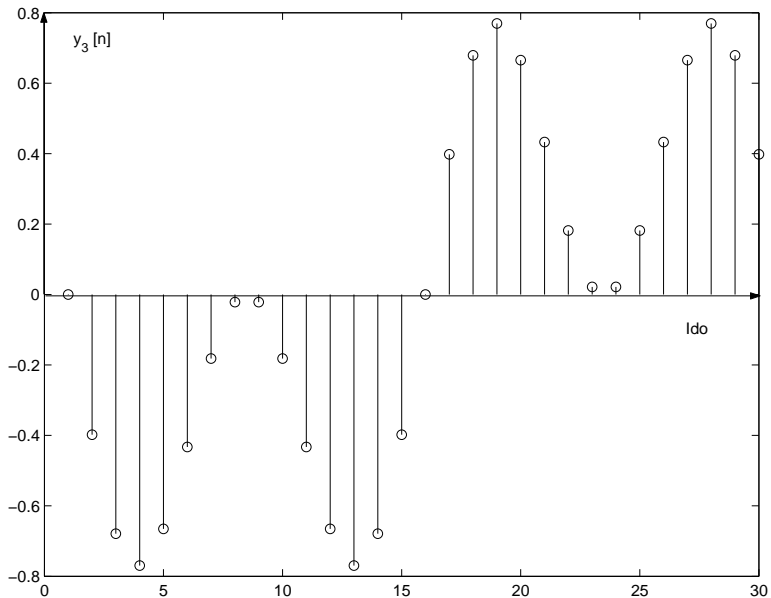
$|Y_2[m]|$



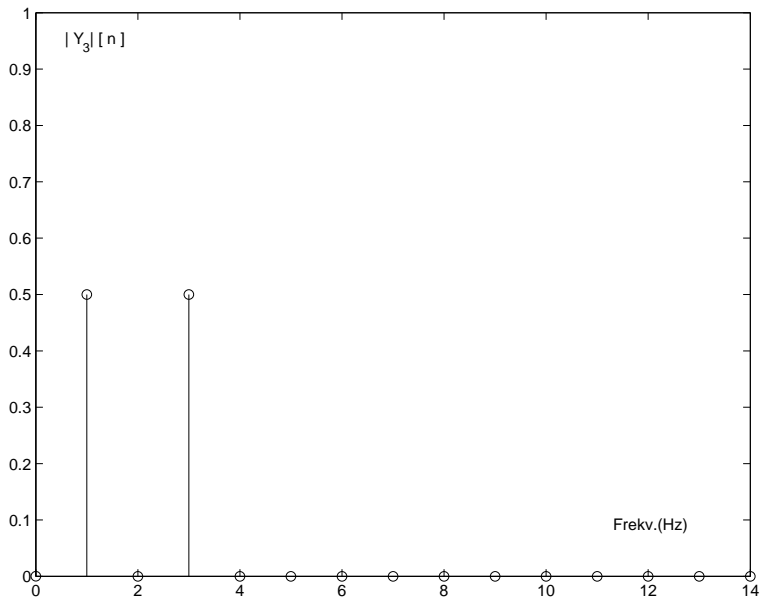
$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$



$$y_3[n] = -\frac{x_2[n]}{2}$$



# $|Y_3[m]|$



# Példa nemlineáris rendszerre

$$y[n] = x^2[n]$$

Jelek és  
műveletek

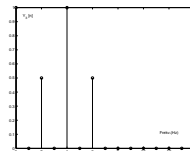
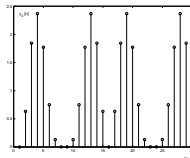
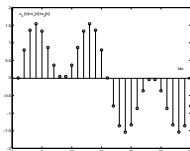
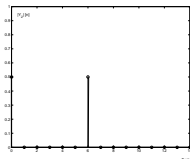
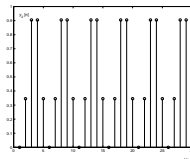
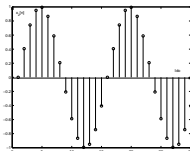
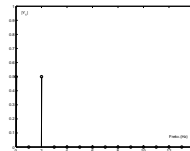
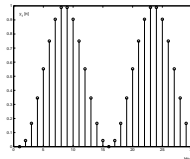
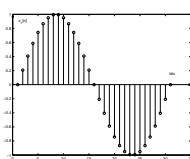
Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

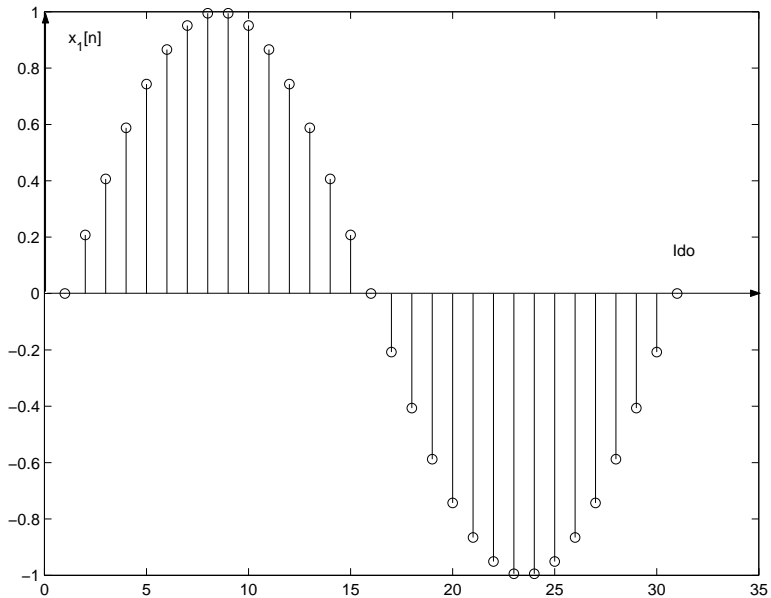
Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

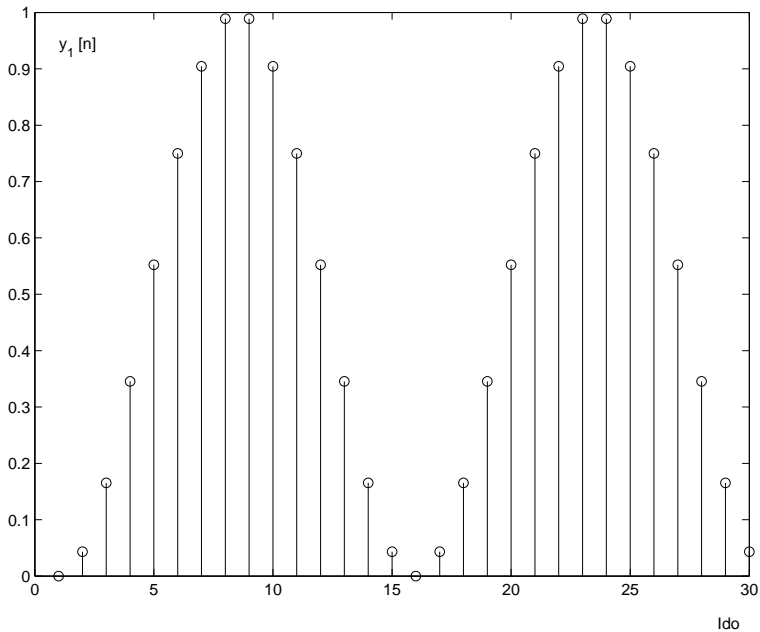
Jelek felbontása



# $x_1[n]$

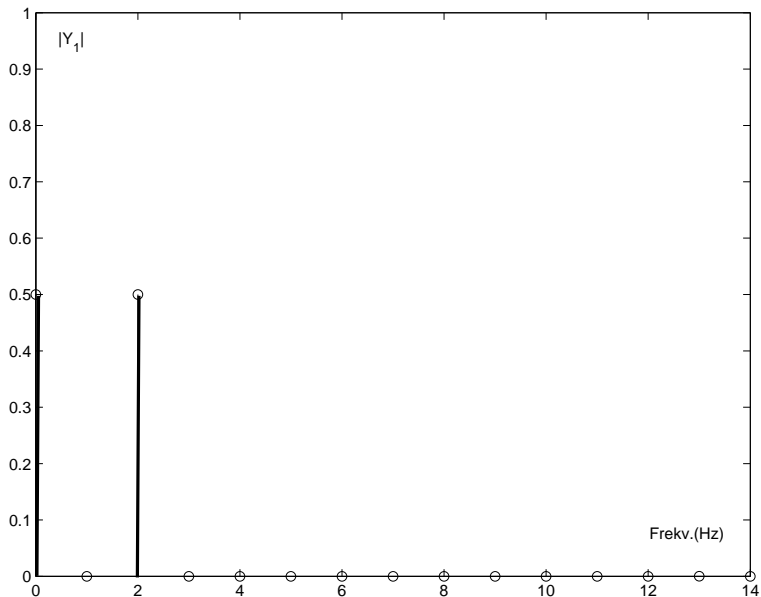


$$y_1[n] = x_1^2[n]$$





$|Y_1[m]|$



Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

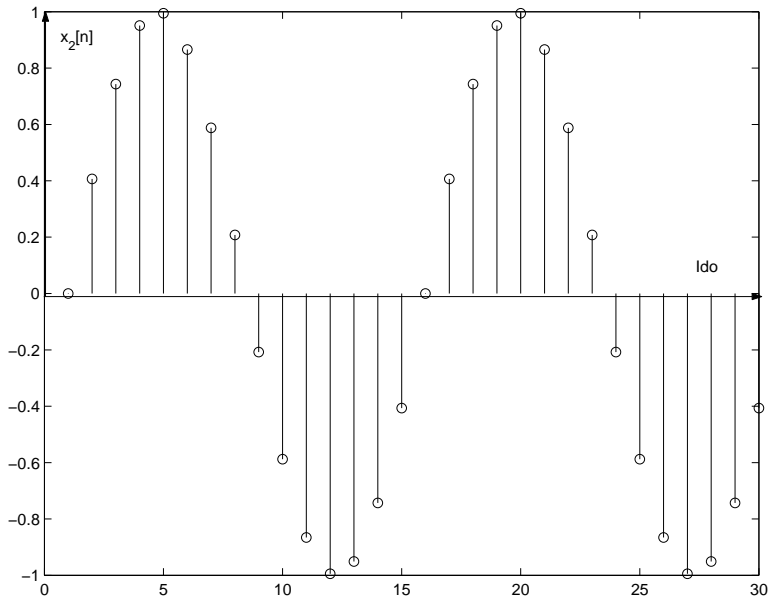
Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

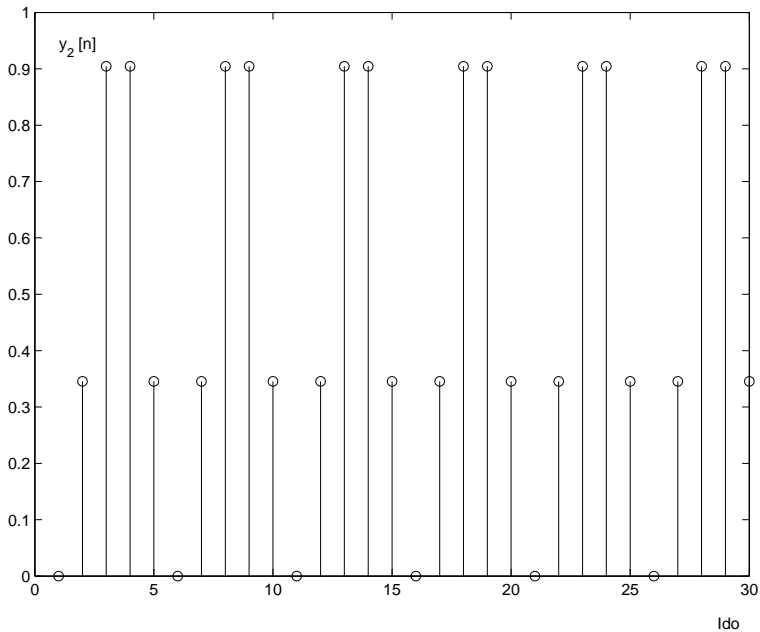
Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

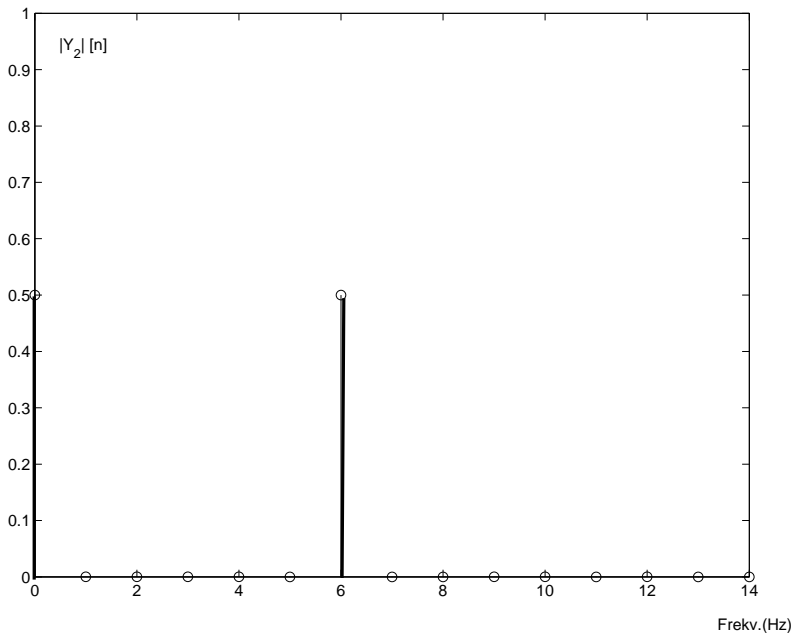
# $x_2[n]$



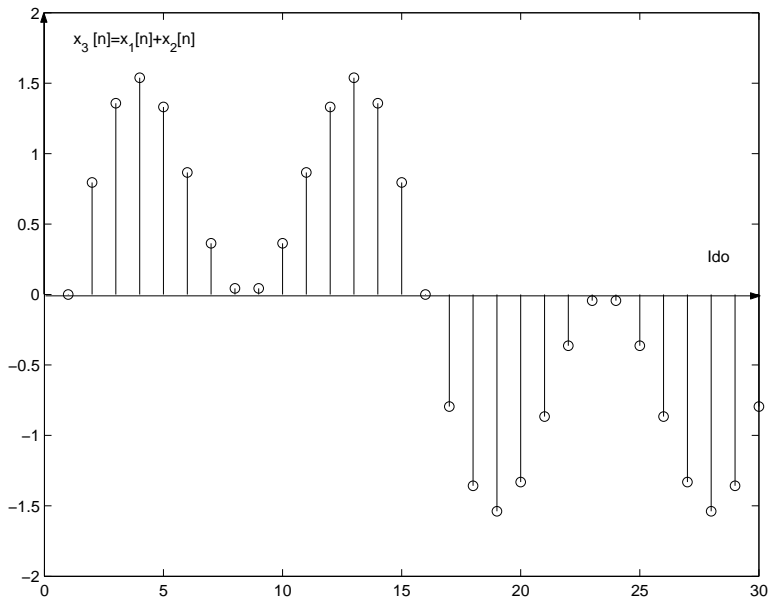
$$y_2[n] = x_2^2[n]$$



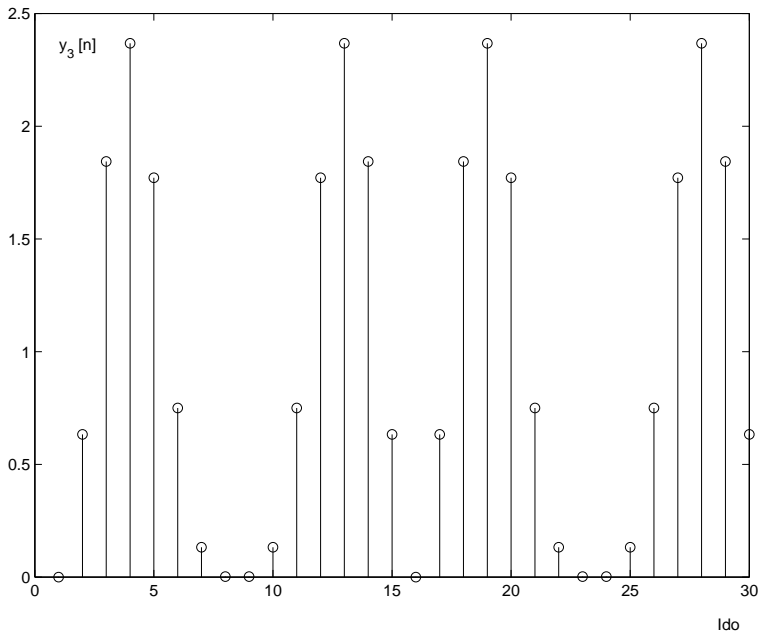
$|Y_2[m]|$



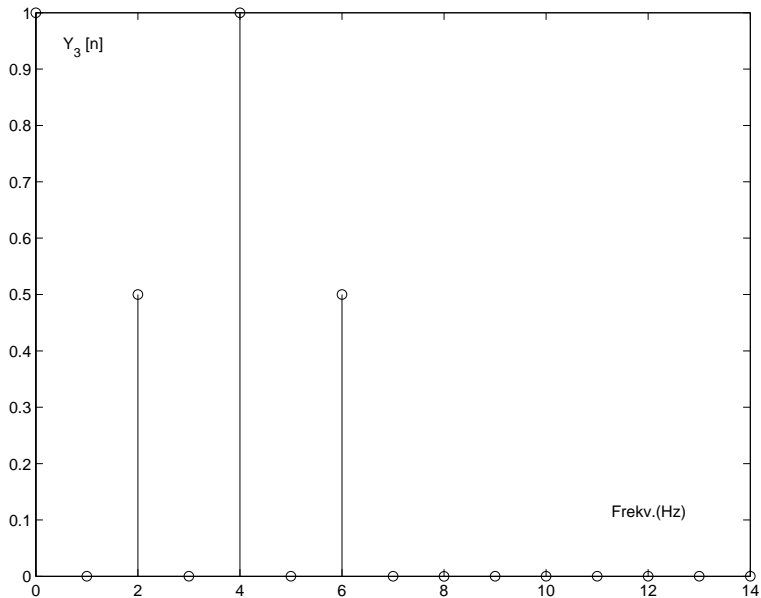
$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$$



$$y_3[n] = x_3^2[n]$$



# $|Y_3[m]|$



# Nemlineáris → Lineáris

$$z[n] = x[n] \cdot y[n]$$

$$\log z[n] = \log x[n] + \log y[n]$$

Homomorfikus jelfeldolgozás



- ▶ Páros és páratlan
- ▶ Páros indexű és páratlan indexű
- ▶ Fourier felbontás

$N$  páros,  $x[0], x[1], \dots, x[N]$

$$x_{\text{paros}}[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_{\text{paratlan}}[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$

$$x[n] = x_{\text{paros}}[n] + x_{\text{paratlan}}[n]$$

$$x_{\text{paros}}[N/2 - 1] = x_{\text{paros}}[N/2 + 1].$$

# Páros indexű és páratlan indexű (1)

Fontos a gyors Fourier transzformáció megvalósításánál

$$x_{paros}[n] = \begin{cases} x[n], & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$x_{paratlan}[n] = \begin{cases} x[n], & n = 2k + 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

# Páros indexű és páratlan indexű (2)

Jelfeldolgozás-  
2.  
előadás

ANTAL Margit

Jelek és  
műveletek

Analóg digitális  
átalakítás

Lineáris  
rendszerek

Amplitúdó, magnitúdó és  
energia

Lineáris rendszerek  
tulajdonságai

Jelek felbontása

